§5. Luỹ thừa của một số hữu tỉ

Có thể viết $(0,25)^8$ và $(0,125)^4$ dưới dạng hai luỹ thừa cùng cơ số ?

1. Luỹ thừa với số mũ tự nhiên

Tương tự như đối với số tự nhiên, với số hữu tỉ x ta định nghĩa :

Luỹ thừa bậc n *của một số hữu tỉ* x, *kí hiệu* x^n, *là tích của* n *thừa số* x (n *là một số tự nhiên lớn hơn* 1).

$$\boxed{x^n = \underbrace{x.x.x...x}_{\text{n thừa số}} \quad (x \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}, n > 1)}$$

x^n đọc là x mũ n hoặc x luỹ thừa n hoặc luỹ thừa bậc n của x ; x gọi là *cơ số*, n gọi là *số mũ*.

Quy ước : $x^1 = x$

$x^0 = 1 \quad (x \neq 0).$

• Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0)$ ta có :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{\text{n thừa số}} = \frac{\overbrace{a.a...a}^{\text{n thừa số}}}{\underbrace{b.b...b}_{\text{n thừa số}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Vậy : $$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

?1 *Tính :* $\left(\frac{-3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{-2}{5}\right)^3$; $(-0,5)^2$; $(-0,5)^3$; $(9,7)^0$.

2. Tích và thương của hai luỹ thừa cùng cơ số

Với số tự nhiên a, ta đã biết :

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0, m \geq n).$$

Cũng vậy, đối với số hữu tỉ x, ta có các công thức :

$$\boxed{x^m . x^n = x^{m+n}}$$

(Khi nhân hai luỹ thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ).

$$\boxed{x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)}$$

(Khi chia hai luỹ thừa cùng cơ số khác 0, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của luỹ thừa bị chia trừ đi số mũ của luỹ thừa chia).

?2 *Tính : a)* $(-3)^2 . (-3)^3$; *b)* $(-0{,}25)^5 : (-0{,}25)^3$.

3. Luỹ thừa của luỹ thừa

?3 *Tính và so sánh :*

a) $(2^2)^3$ *và* 2^6 ; *b)* $\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^2\right]^5$ *và* $\left(\frac{-1}{2}\right)^{10}$.

Ta có công thức :

$$\boxed{\left(x^m\right)^n = x^{m.n}}$$

(Khi tính luỹ thừa của một luỹ thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ).

?4 *Điền số thích hợp vào ô vuông :*

a) $\left[\left(\frac{-3}{4}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{\square}$;

b) $\left[(0{,}1)^4\right]^{\square} = (0{,}1)^8$.

Bài tập

27. Tính :

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^4;\ \left(-2\frac{1}{4}\right)^3;\ (-0{,}2)^2;\ (-5{,}3)^0.$$

28. Tính :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^4;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^5.$$

Hãy rút ra nhận xét về dấu của luỹ thừa với số mũ chẵn và luỹ thừa với số mũ lẻ của một số hữu tỉ âm.

29. Viết số $\frac{16}{81}$ dưới dạng một luỹ thừa, ví dụ $\frac{16}{81}=\left(\frac{4}{9}\right)^2$. Hãy tìm các cách viết khác.

30. Tìm x, biết :

a) $x:\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{2}$;   b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot x=\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

31. Viết các số $(0{,}25)^8$ và $(0{,}125)^4$ dưới dạng các luỹ thừa của cơ số 0,5.

32. ***Đố :***

Hãy chọn hai chữ số sao cho có thể viết hai chữ số đó thành một luỹ thừa để được kết quả là số nguyên dương nhỏ nhất. (Chọn được càng nhiều càng tốt).

33. *Sử dụng máy tính bỏ túi*

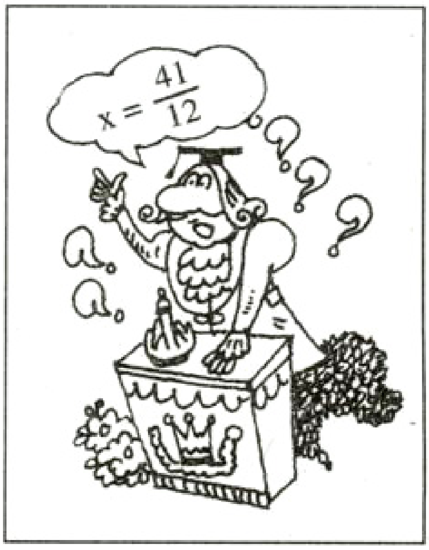
Tính	Nút ấn	Kết quả
$(2,3)^2$	$\boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}$	5,29
$(-1,4)^3$	$\boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{+/\_}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	–2,744
$(0,5)^4$	$\boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	0,0625

Dùng máy tính bỏ túi để tính :

$$(3,5)^2\ ;\ \ (-0,12)^3\ ;\ \ (1,5)^4\ ;\ \ (-0,1)^5\ ;\ \ (1,2)^6.$$

Có thể em chưa biết

Thử tài Fi-bô-na-xi



Fi-bô-na-xi (nhà toán học I-ta-li-a thế kỉ XIII) đã từng tham gia nhiều cuộc tranh tài toán học và đã công bố nhiều lời giải hay cho những bài toán khó. Năm 1225, hoàng đế La Mã Frê-đê-ric II cùng một số nhà toán học đã thử tài Fi-bô-na-xi bằng bài toán sau : "Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + 5$ và $x^2 - 5$ đều là bình phương của các số hữu tỉ".

Sau khi suy nghĩ một lúc, Fi-bô-na-xi đã tìm ra số đó là $\frac{41}{12}$.

Thật vậy :

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

Đến nay, người ta cũng chưa biết chính xác Fi-bô-na-xi đã tìm ra số đó bằng cách nào !

Fi-bô-na-xi được nhiều người biết đến nhờ dãy số mang tên ông : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Dãy số này có quy luật thành lập rất đơn giản : Hai số hạng đầu là 1, mỗi số hạng của dãy kể từ số hạng thứ ba đều bằng tổng hai số hạng đứng liền trước nó.

Dãy Fi-bô-na-xi có nhiều tính chất toán học lí thú.