D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu được sự mở rộng định nghĩa luỹ thừa của một số từ số mũ nguyên dương đến số mũ nguyên và số mũ hữu tỉ thông qua căn số.

– Hiểu rõ các định nghĩa và nhớ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và các tính chất của căn số.

Kĩ năng

Giúp học sinh biết vận dụng định nghĩa và tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ để thực hiện các phép tính.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên âm được định nghĩa dựa trên định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương. Định nghĩa này là tự nhiên, phù hợp với các công thức đã biết, đặc biệt là công thức :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (} m, n \text{ nguyên dương, } m > n).$$

Vì vậy cần nhắc lại cho học sinh định nghĩa và các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

2. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ cần phải được định nghĩa sao cho nó có tất cả các tính chất như của luỹ thừa với số mũ nguyên. Khi đó, nói riêng, luỹ thừa bậc n của số $a^{\frac{m}{n}}$ cần phải bằng a^m ; thật vậy, nếu tính chất $(a^p)^q = a^{pq}$ được thoả mãn thì $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}.n} = a^m$. Điều đó có nghĩa là $a^{\frac{m}{n}}$ cần phải bằng căn bậc n của số a^m $\left(\text{tức là } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\right)$.

3. Cần nhấn mạnh điều kiện về cơ số của luỹ thừa với số mũ 0, số mũ nguyên âm và số mũ không nguyên. Các điều kiện này đã được đề cập ngay ở trong các định nghĩa luỹ thừa. Có thể giải thích cho học sinh (nếu là lớp khá) tại sao lại có những điều kiện ấy. Chẳng hạn, về luỹ thừa a^r với số mũ hữu tỉ r : Để định nghĩa a^r không phụ thuộc vào phân số $\frac{m}{n}$ biểu diễn số hữu tỉ r và luỹ thừa a^r có đầy đủ các tính chất như của luỹ thừa với số mũ nguyên, thì phải có điều kiện $a > 0$. Giả sử $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ cũng được định nghĩa đối với cả $a < 0$. Khi đó có thể xảy ra những mâu thuẫn, chẳng hạn, một mặt

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$; mặt khác, do $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ nên $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2.$

Hơn nữa, tính chất $(a^r)^s = a^{rs}$ không thoả mãn ; chẳng hạn $\left((-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

còn $(-1)^{\frac{3}{2}.\frac{2}{3}} = (-1)^1 = -1$. Bởi vậy, cần phải có điều kiện cơ số dương cho luỹ thừa với số mũ không nguyên.

4. Đặc biệt lưu ý đến cơ số 10 (cơ số trong hệ đếm thập phân). Giới thiệu vài ứng dụng đơn giản của luỹ thừa với số mũ nguyên của cơ số 10.

5. Tuy SGK không nêu lại những tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ thành bảng công thức, song trong quá trình giảng dạy, mỗi khi có cơ hội, cần cho học sinh nhắc lại những tính chất này bằng cách chuyển từ tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên sang. Dựa vào tính chất của căn thức, ta có thể chứng minh được các tính chất đó.

III – GỢI Ý DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian :*** 2 tiết.

– Luỹ thừa với số mũ nguyên : 1 tiết.

– Căn bậc n và luỹ thừa với số mũ hữu tỉ : 1 tiết.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Ôn lại định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Giải

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27};$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)^5 = \left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right) = -9\sqrt{3}.$$

$$0^4 = 0.0.0.0 = 0.$$

H2 *Mục đích :* Dùng định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên âm và tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương để kiểm tra một quy tắc tính toán. Từ đó học sinh biết cách kiểm tra các quy tắc còn lại (nếu muốn).

Giải

– Khi $n = 0$, công thức hiển nhiên đúng.

– Với $m > 0$, $n < 0$ và $m > |n|$ thì

$$a^m . a^n = a^m . \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Lưu ý rằng, m và $-n$ là những số nguyên dương, từ $m > |n|$ ta còn có $m - (-n)$ cũng là một số nguyên dương.

H3 *Mục đích :* Áp dụng tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên để kiểm tra bất đẳng thức.

Giải

Ta có $0 < 0{,}99 < 1$ nên $(0{,}99)^2 < 1^2 = 1$, do đó $(0{,}99)^2.99 < 99$.

Ta có $0 < 0{,}99 < 1$ nên $(0{,}99)^{-1} > 1^{-1} = 1$, do đó $(0{,}99)^{-1}.99 > 99$.

Cũng có thể biến đổi

$$(0{,}99)^{-1}.99 = \frac{99}{0{,}99} = 100 > 99.$$

H4 *Mục đích :* Chứng minh một số tính chất của căn bậc n xuất phát từ định nghĩa và dựa vào tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Giải

a) Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$. Khi đó ta có $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, vô lí.

Giả sử $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Khi đó, do n là một số tự nhiên lẻ, nên theo hệ quả 2 ta có $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n > \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, vô lí.

Vậy $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ với n là số nguyên lẻ.

b) Chứng minh bằng phản chứng, tương tự như câu a).

Lưu ý rằng, với $a > 0$, $b > 0$, ta có $\sqrt[n]{a} > 0$ và $\sqrt[n]{b} > 0$ với mọi số nguyên dương n.

• Để có đủ thời gian dạy căn bậc n và số mũ hữu tỉ trong một tiết có thể tiến hành bài giảng như sau :

– Giới thiệu định nghĩa căn bậc n.

– Nêu ví dụ để minh hoạ và khắc sâu hai khẳng định sau định nghĩa căn bậc n. Hai khẳng định này được chứng minh trong phần bổ sung kiến thức.

– Đối với các tính chất của căn, có thể để lại tất cả các chứng minh mà chỉ nêu ví dụ minh hoạ (kể cả **H4**). Tuy nhiên, đối với những lớp HS khá giỏi, có thể cho HS chứng minh một vài tính chất của căn ; chẳng hạn, có thể chứng minh tính chất 4) như sau : Theo định nghĩa của căn và quy tắc tính luỹ thừa với số mũ nguyên dương, ta có

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} = \left[\sqrt[n]{a}\right]^{n} = a,\ \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$$

Vậy $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}$, từ đó suy ra $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

– Giới thiệu định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ, nhấn mạnh điều kiện về cơ số. Nêu một số ví dụ tính toán có áp dụng các tính chất của luỹ thừa này.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

2. Điều kiện C.

3. $7^{-1}.14 = \dfrac{14}{7} = 2$; $\dfrac{4}{3^{-2}} = 4.3^2 = 36$;

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2} = \dfrac{5^2}{4^2} = \dfrac{25}{16}$; $\dfrac{(-18)^2.5}{15^2.3} = \dfrac{18^2.5}{5^2.3^3} = \dfrac{2^2.5.3^4}{5^2.3^3} = \dfrac{2^2.3}{5} = \dfrac{12}{5}$.

4. a) $81^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left((3)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}}$

$$=(3)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{27}+5-8=\frac{1}{27}-3=-\frac{80}{27}.$$

b) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2$

$$=\left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}.\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2^3\right)^{-\frac{4}{3}}+1$$

$$=10-2^2-2^{-4}+1=7-\frac{1}{16}=\frac{111}{16}.$$

c) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}-25^{0{,}5}$

$$=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}-\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}=3^2+2^3-5=12.$$

d) $(-0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$

$$=\left((-2)^{-1}\right)^{-4}-\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{19}{-27}$$

$$=2^4-5-\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}-\frac{19}{27}=11-\frac{8}{27}-\frac{19}{27}=10.$$

5. a) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$

b) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)}$

$$=(1+a)-(1-a)=2a.$$

6. a) Ta có $\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9$.

Do $9 > 8$ nên ta có $\left(\sqrt{2}\right)^6 < \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, suy ra $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 1 + \sqrt[3]{27} = 4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{63}$.

c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < 2 + 4 = 3 + 3 < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

7. *Cách 1.* Ta có $7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$.

Tương tự $7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$.

Suy ra $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$.

Cách 2. Đặt $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, ta cần chứng minh $x = 2$. Ta có

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{\left(7 + 5\sqrt{2}\right)^2}.\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.\sqrt[3]{\left(7 - 5\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= 14 - 3(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}) = 14 - 3x.$$

Từ đó ta có

$$x^3 + 3x - 14 = 0. \qquad (1)$$

$(1) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x^2 + 2x + 7 > 0$).

Cách 3. Ta có $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = -1$, do đó $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$ nếu $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ và $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 2X - 1 = 0$, tức là

$$\begin{cases} \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} & (2) \\ \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}. & (3) \end{cases}$$

Các đẳng thức (2) và (3) được chứng minh bằng cách lập phương hai vế.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

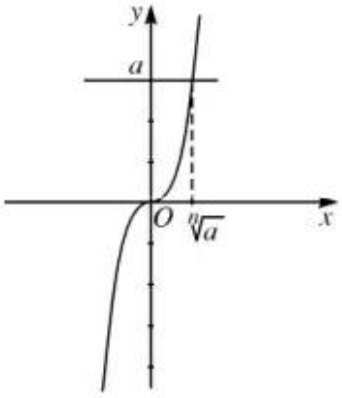
- *Chứng minh hai khẳng định sau :*

1. Khi n là số nguyên dương lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n.

2. Khi n là số nguyên dương chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

Chứng minh. Xét hàm số $y = x^n$ (với n là số nguyên dương).

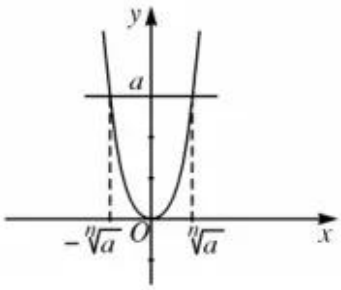
1. Khi n là số nguyên dương lẻ thì $y = x^n$ là một hàm số lẻ, liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$ và nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$. Từ đó với mỗi a thuộc $\mathbb{R}$, có duy nhất b thuộc $\mathbb{R}$ để $a = b^n$, nói cách khác, tồn tại duy nhất $b = \sqrt[n]{a}$.



Hình 2.1

Trong trường hợp này, đồ thị của hàm số $y = x^n$ có dạng như trong hình 2.1. Từ đó dễ thấy đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị $y = x^n$ tại đúng một điểm (có hoành độ là $b = \sqrt[n]{a}$).

2. Khi n là một số nguyên dương chẵn, $y = x^n$ là một hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ hàm số $y = x^n$ đồng biến và nhận mọi giá trị từ 0 đến $+\infty$ nên với mỗi $a \geq 0$, có duy nhất $b \in [0;+\infty)$ để $a = b^n$. Số b đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học hay căn không âm của a).



Hình 2.2

Do hàm số $y = x^n$ là hàm số chẵn nên còn có $-b \in (-\infty;0]$ cũng thoả mãn $a = (-b)^n$, hay $-b = -\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn âm của a). Vậy với mỗi $a > 0$, có hai căn bậc n của a là $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$.

Trong trường hợp này, đồ thị của hàm số $y = x^n$ có dạng như trong hình 2.2 nên dễ thấy đường thẳng $y = a > 0$ cắt đồ thị đó tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua trục Oy.

Khi $a = 0$, có duy nhất căn bậc n của 0 là 0.

- *Chứng minh hệ quả 2*

Với $0 < a < b$ thì $a^n < b^n$ với mọi số nguyên dương n (do hệ quả 1).

Với $a < 0 < b$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta có $a^n < 0$ và $b^n > 0$, do đó $a^n < b^n$.

Với $a = 0$ hoặc $b = 0$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta vẫn có $a^n < b^n$.

Với $a < b < 0$, tức là $-a > -b > 0$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta có

$$(-a)^n > (-b)^n \text{ hay } -a^n > -b^n \text{ suy ra } a^n < b^n.$$