D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. SỐ PHỨC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu được nhu cầu mở rộng tập hợp số thực thành tập hợp số phức ;

– Hiểu cách xây dựng phép toán cộng và nhân số phức từ phép toán cộng và nhân các biểu thức dạng $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$;

– Hiểu được định nghĩa số phức liên hợp và hai tính chất cơ bản liên quan đến khái niệm này (số phức liên hợp của tổng, tích và môđun của số phức) ;

– Hiểu được định nghĩa số phức nghịch đảo và phép chia cho số phức khác 0.

– Thấy được các tính chất của các phép toán cộng và nhân số phức, tương tự các tính chất của phép toán cộng và nhân số thực và đó là cơ sở để thực hiện các phép toán đại số trên tập hợp số phức.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Biết cách biểu diễn số phức bởi điểm và bởi vectơ trong mặt phẳng phức ;

– Thực hiện thành thạo phép cộng, trừ, nhân, chia hai số phức.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm số phức

• Mở đầu §1, sách có mấy dòng nêu lên sự cần thiết phải xét các số phức và giới thiệu qua khái niệm số phức. Giáo viên nên giới thiệu phần này một cách nhẹ nhàng.

• Sách không dùng kí hiệu $i = \sqrt{-1}$ (để tránh gây hiểu nhầm) và chưa dùng từ "dạng đại số của số phức" (để đến khi học "dạng lượng giác của số phức" mới đưa vào).

• Sách không đưa kí hiệu Rez, Imz để chỉ phần thực và phần ảo của số phức z để đỡ nặng nề.

• Một số SGK gọi số ảo là số phức không thực, gọi số thuần ảo là số phức dạng bi với $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; trong SGK này, mọi số phức có phần thực bằng 0 đều được coi là số ảo để cho gọn gàng và tiện lợi.

2. Biểu diễn hình học số phức

• Nên nói qua việc biểu diễn tập hợp số thực trên trục số khi nói đến biểu diễn số phức trên mặt phẳng toạ độ. Việc biểu diễn hình học số phức giúp học sinh hình dung một cách trực quan khái niệm số phức đã được định nghĩa một cách hình thức (không thực chặt chẽ toán học) bởi "biểu thức" $a + bi$.

• Khi biểu diễn hình học số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ bởi điểm M có toạ độ $(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, sách có đưa kí hiệu $M(z)$, hoặc đôi khi dùng ngay cả chữ z để chỉ điểm $M(z)$ cho thuận tiện (nếu không gây hiểu nhầm).

• Nên nhắc nhở học sinh rằng tập hợp số thực được biểu diễn bởi tập hợp các điểm của trục thực Ox, còn mỗi điểm trên trục ảo Oy biểu diễn số ảo bi $(b \in \mathbb{R})$, trong đó có điểm biểu diễn đơn vị ảo.

3. Phép cộng và phép trừ số phức

• SGK có trình bày chi tiết các tính chất của phép cộng số phức (giao hoán, kết hợp v.v...), nhưng khi dạy, giáo viên không nên dừng lại ở đây lâu, thậm chí có thể chỉ nói qua, để học sinh tự đọc vì học sinh có thể đã quá quen với các tính chất đó của phép cộng số thực, cộng các biểu thức $a + bi$.

• SGK có nói đến biểu diễn số phức bởi vectơ trong mặt phẳng để nói rằng phép cộng số phức được diễn tả đầy đủ bởi phép cộng vectơ (nói như ở Đại học : nhóm cộng số phức đẳng cấu với nhóm cộng các vectơ trong mặt phẳng).

4. Phép nhân số phức

• Để tránh đưa ngay định nghĩa phép nhân hai số phức một cách áp đặt (và có vẻ không "tự nhiên"), sách đã đề nghị trước hết hãy thực hiện phép nhân một cách hình thức biểu thức $a + bi$ với biểu thức $a' + b'i$ và thay i^2 bằng -1.

• Ý nghĩa hình học của phép nhân số phức sẽ được đề cập đến khi nói về dạng lượng giác của số phức (tuy nhiên cũng đã được giới thiệu phần nào ở bài tập đố vui 16 : hai tam giác có các đỉnh theo thứ tự biểu diễn các số 0, 1, z và 0, z', zz' là hai tam giác đồng dạng (z không thực, $z' \neq 0$).

• Đến đây có thể nói với học sinh rằng, do phép cộng và phép nhân số phức có các tính chất tương tự phép cộng và phép nhân các số thực nên ta vẫn vận dụng được các "quy tắc" tính toán quen thuộc, chẳng hạn vẫn có hằng đẳng thức $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ với $z, w \in \mathbb{C}$. v.v...

5. Số phức liên hợp

• Các tính chất $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$, $\overline{z.z'} = \bar{z}.\overline{z'}$ được suy ra dễ dàng từ định nghĩa và được đề cập đến trong bài tập 6 (hai đẳng thức này muốn nói theo ngôn ngữ ở đại học rằng $z \mapsto \bar{z}$ là một tự đẳng cấu của trường số phức).

• Cần nhấn mạnh ý nghĩa hình học của môđun các số phức.

• Các khái niệm số phức liên hợp và môđun của số phức giúp trình bày dễ dàng phép chia số phức.

6. Phép chia số phức

• Có thể trình bày trực tiếp phép chia hai số phức không thông qua khái niệm số phức nghịch đảo, nhưng cách dùng số phức nghịch đảo như trong sách có lẽ dễ dàng hơn và thống nhất với cách trình bày phép toán trừ là phép cộng với số đối.

• Chú ý rằng với số phức $z \neq 0$, số $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ là số phức duy nhất thoả mãn điều kiện $z.z^{-1} = 1$, nhưng để đơn giản, sách đã không trình bày tính duy nhất này, (mà điều này là cần thiết để khẳng định rằng phép chia (cho số khác 0) là phép toán ngược của phép nhân).

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian dạy***

Mục	1, 2, 3a, 3b :	1 tiết
	3c, 3d, 4a :	1 tiết
	4b, 5a :	1 tiết
	5b, 6 :	1 tiết

Tuy nhiên, không nên quá cứng nhắc trong việc phân chia mục dạy như thế. Cái chính là làm cho học sinh nắm được khái niệm số phức, tính toán trên số phức, biểu diễn hình học số phức. Không nên đi sâu vào phân tích từng tính chất của các phép toán.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Làm cho học sinh hiểu rõ hơn rằng, số 0 vừa được xem là số thực (phần ảo bằng 0), vừa được xem là số ảo (phần thực bằng 0). Ngoài ra, về sau tính chất $z = a + bi = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ kéo theo $a = 0, b = 0$ được sử dụng thường xuyên.

Trả lời : $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$.

$\boxed{\textbf{H2}}$ *Trả lời :* M biểu diễn z, M' biểu diễn $-z$ thì M, M' đối xứng qua gốc toạ độ. Điều đó suy ra từ : nếu $z = a + bi$ thì M có toạ độ là $(a\,;\,b)$ và M' có toạ độ $(-a\,;\,-b)$ do $-z = -a - bi$ và rõ ràng hai điểm có toạ độ $(a\,;\,b)$ và $(-a\,;\,-b)$ đối xứng qua gốc toạ độ.

(Nếu muốn, giáo viên cũng có thể nói thêm cho học sinh giỏi chẳng hạn rằng : vậy phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số $z' = -z$ là phép đối xứng qua tâm O (gốc toạ độ)).

$\boxed{\textbf{H3}}$ *Mục đích :* Nêu lên được mối liên quan giữa phép toán nhân số thực với số phức và nhân số thực với vectơ để học sinh thấy được mối liên quan giữa những điều đã được học. Điều này còn phục vụ ngay cho ví dụ 5 nêu tiếp sau đó.

Trả lời : vectơ $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz. Điều đó suy ra từ : nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $kz = ka + kbi$, còn toạ độ của $\vec{u}$ là $(a\,;\,b)$ và toạ độ của $k\vec{u}$ là $(ka\,;\,kb)$.

(Với học sinh giỏi có thể nói thêm : phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số phức $z' = kz$ (k là số thực khác 0 cho trước) là phép vị tự tâm O (gốc toạ độ) với hệ số vị tự k).

(Nói theo ngôn ngữ của Toán cao cấp thì mối liên quan giữa cộng trừ số phức với cộng trừ vectơ đã được trình bày cùng với tính chất vừa nêu lên trong $\boxed{\textbf{H3}}$ nói rằng $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{C}$ đẳng cấu không gian các vectơ trong mặt phẳng).

$\boxed{\textbf{H4}}$ *Mục đích :* Cho học sinh thực hành tính z^2 theo quy tắc vừa học và ôn lại cho học sinh về phần thực phần ảo của số phức, về trục thực, trục ảo.

Trả lời : Tập hợp các điểm trên trục thực và các điểm trên trục ảo. Điều đó suy ra từ : $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thực khi và chỉ khi $xy = 0$ tức $x = 0$ hoặc $y = 0$.

$\boxed{\textbf{H5}}$ *Mục đích :* Làm học sinh thấy rõ hơn ý nghĩa việc mở rộng $\mathbb{R}$ thành $\mathbb{C}$ và làm cho học sinh quen với cách phân tích thành nhân tử này (không thể thực hiện được trong $\mathbb{R}$), cũng như chuẩn bị cho học sinh việc tính căn bậc hai của số thực âm.

Trả lời : $z^2 + 4 = z^2 - 4i^2 = (z + 2i)(z - 2i)$.

(Với học sinh giỏi, có thể nói thêm : tổng quát, nếu a là số thực thì $z^2 + a^2 = z^2 - (ai)^2 = (z + ai)(z - ai)$) ; "thủ thuật" cần nhắc nhở ở đây là viết a^2 thành $-(ai)^2$.

H6 *Mục đích :* đề cập đến một tính chất thường được dùng.

Chứng minh

Cách 1 : z biểu diễn bởi điểm M thì z là số thực khi và chỉ khi M nằm trên trục thực, tức là khi và chỉ khi điểm M' đối xứng của M qua trục thực phải trùng với M. Nhưng M' biểu diễn số phức $\bar{z}$ nên suy ra z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$.

Cách 2 : $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $\bar{z} = a - bi$ nên $z - \bar{z} = 2bi$; từ đó z là số thực khi và chỉ khi $b = 0$ cũng tức là khi và chỉ khi $2bi = z - \bar{z} = 0$; đẳng thức cuối này có nghĩa là $z = \bar{z}$.

H7 *Mục đích :* Chuẩn bị cho định nghĩa môđun của số phức.

Chứng minh : $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

H8 *Mục đích :* Chứng minh một tính chất về việc lấy số phức liên hợp.

Chứng minh : Dùng tính toán trực tiếp ($z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ hoặc dùng biểu diễn hình học (phép đối xứng qua trục Ox bảo tồn khoảng cách giữa các điểm).

H9 *Mục đích :* Dẫn đến định nghĩa số phức nghịch đảo của $z \neq 0$.

Chứng minh : $z.z^{-1} = z\left(\dfrac{1}{a^2 + b^2}\bar{z}\right) = \dfrac{1}{a^2 + b^2} z.\bar{z} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$.

H10 *Mục đích :* Làm cho học sinh quen với giải phương trình bậc nhất.

Giải

$$(1 + 2i)z = 3z - i \Leftrightarrow (1 + 2i - 3)z = -i$$

$$\Leftrightarrow (-2 + 2i)z = -i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{-2 + 2i} = \frac{-i(-1 - i)}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

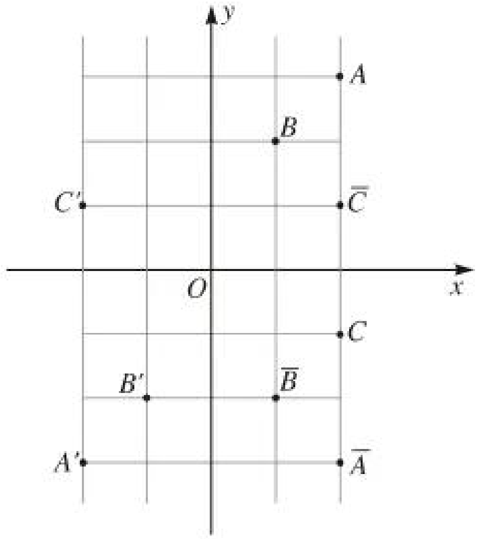
1. (h.4.1) a) điểm A $(2 + 3i)$, B $(1 + 2i)$, C $(2 - i)$.

b) Các số phức liên hợp của $2 + 3i$, $1 + 2i$, $2 - i$ được biểu diễn bởi :

$\overline{A}$ $(2 - 3i)$, $\overline{B}$ $(1 - 2i)$, $\overline{C}$ $(2 + i)$.

c) Các số đối của $2 + 3i$, $1 + 2i$, $2 - i$ được biểu diễn bởi

A' $(-2 - 3i)$, B' $(-1 - 2i)$, $C'(-2 + i)$.



Hình 4.1

2. a) $i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = -1 - i$ có phần thực bằng -1, phần ảo bằng -1 ;

b) $(\sqrt{2} + 3i)^2 = 2 + 6\sqrt{2}i + 9i^2 = -7 + 6\sqrt{2}i$ có phần thực bằng -7, phần ảo bằng $6\sqrt{2}$;

c) $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - (3i)^2 = 13$ có phần thực bằng 13, phần ảo bằng 0 ;

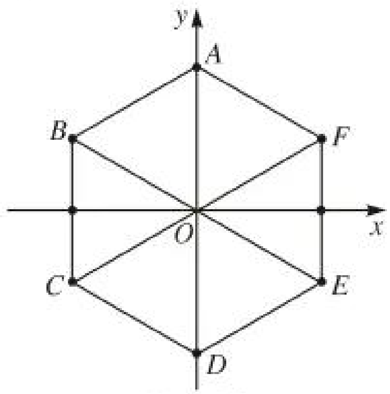
d) $i(2 - i)(3 + i) = (2i - i^2)(3 + i) = (1 + 2i)(3 + i) = 3 - 2 + 7i = 1 + 7i$ có phần thực bằng 1, phần ảo bằng 7.

3. Xem hình 4.2. Điểm A biểu diễn số i.

Dễ thấy rằng F có toạ độ $\left(\cos\frac{\pi}{6}; \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên F biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

E đối xứng với F qua Ox nên E biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

B đối xứng với E qua O nên B biểu diễn số $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.



Hình 4.2

C đối xứng với F qua O nên C biểu diễn số $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

D đối xứng với A qua O nên D biểu diễn số $-i$.

4. $\dfrac{1}{2-3i}=\dfrac{2+3i}{4+9}=\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i.$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\frac{3-2i}{i}=\frac{-i(3-2i)}{1}=-2-3i.$$

$$\frac{3-4i}{4-i}=\frac{(3-4i)(4+i)}{17}=\frac{16-13i}{17}=\frac{16}{17}-\frac{13}{17}i.$$

5. $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $|z|=1$ nên :

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{z}\ ;$$

$$z^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;$$

$$\bar{z}^3=\bar{z}\,\bar{z}^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=1\ ;$$

$$1+z+z^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0.$$

6. a) $z=a+bi$ $(a, b\in\mathbb{R})$ thì $\bar{z}=a-bi$ nên phần thực của z là $a=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, phần ảo của z là $b=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

b) z là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng $0 \Leftrightarrow z+\bar{z}=0$ tức là $z=-\bar{z}$.

c) $z=a+bi$, $z'=a'+b'i$ $(a, b, a', b'\in\mathbb{R})$ thì

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+a')+(b+b')i} = a+a'-(b+b')i$$

$$= a-bi+a'-b'i = \overline{z}+\overline{z}',$$

$$\overline{z.z'} = \overline{(aa'-bb')+(ab'+ba')i} = (aa'-bb')-(ab'+ba')i$$

$$= (a-bi)(a'-b'i) = \overline{z}\,\overline{z}'.$$

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}\right)} = \frac{1}{z.\overline{z}}\overline{z'}.\overline{\overline{z}} = \frac{1}{z.\overline{z}}\overline{z'}.z = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

7. Vì $i^4 = 1$ nên với mọi số m nguyên dương, ta có $(i^4)^m = 1^m = 1$ tức là $i^{4m} = 1$. Từ đó $i^{4m+1} = i^{4m}.i = i$, $i^{4m+2} = i^{4m+1}.i = i^2 = -1$, $i^{4m+3} = i^{4m+2}.i = -i$.

8. a) $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\vec{u}$ biểu diễn z thì $\vec{u}$ có toạ độ $(a\,;\,b)$ và $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$. Vậy $|\vec{u}| = |z|$.

Nếu A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2 thì vectơ $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ biểu diễn $z_2 - z_1$ nên $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |z_2 - z_1|$.

b) $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ thì $|z|^2 = a^2 + b^2$, $|z'|^2 = a'^2 + b'^2$ còn $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$ nên

$$|z.z'|^2 = (aa'-bb')^2 + (ab'+ba')^2$$

$$= (aa')^2 + (bb')^2 - 2(aa')(bb') + (ab')^2 + (ba')^2 + 2(ab')(ba')$$

$$= (aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (ba')^2$$

$$= (a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = |z|^2\,|z'|^2,$$

từ đó $|z.z'| = |z|\,|z'|$.

Khi $z \neq 0$, ta có $\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{z'\overline{z}}{|z|^2}\right| = \frac{1}{|z|^2}|z'\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}|z'||\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}|z'||z| = \frac{|z'|}{|z|}$.

c) $\vec{u}$ biểu diễn z, $\vec{u}'$ biểu diễn z' thì $\vec{u}+\vec{u}'$ biểu diễn $z + z'$ và $|z + z'| = |\vec{u} + \vec{u}'|$.

Khi $z.z' \neq 0$ thì

$$|\vec{u} + \vec{u}'|^2 = (\vec{u} + \vec{u}')^2 = \vec{u}^2 + \vec{u}'^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{u}'|\cos(\vec{u}, \vec{u}')$$

$$\leq |\vec{u}|^2 + |\vec{u}'|^2 + 2|\vec{u}||\vec{u}'| = \left(|\vec{u}| + |\vec{u}'|\right)^2 = \left(|z| + |z'|\right)^2.$$

Từ đó $|z + z'| = |\vec{u} + \vec{u}'| \leq |z| + |z'|$.

Còn khi $z.z' = 0$ thì rõ ràng $|z + z'| = |z| + |z'|$.

9. a) *Cách 1 :* Gọi I là điểm biểu diễn số i, M là điểm biểu diễn số z ta có $|z - i| = |\overrightarrow{IM}|$. Vậy $|z - i| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = 1$. Do đó quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính bằng 1.

Cách 2 : Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z - i = x + (y - 1)i$ nên $|z - i| = 1$ $\Leftrightarrow |z - i|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$: đây là phương trình đường tròn tâm $(0 ; 1)$, bán kính 1.

b) *Cách 1 :* Gọi M là điểm biểu diễn số z, I là điểm biểu diễn số i, J là điểm biểu diễn số $-i$ thì $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = \dfrac{|\overrightarrow{IM}|}{|\overrightarrow{JM}|}$, vậy $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{JM}|$ $(M \neq J)$

$\Leftrightarrow M$ nằm trên đường trung trực của $IJ \Leftrightarrow M$ thuộc trục thực Ox.

Cách 2 : Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = |z + i|$ (rõ ràng $z \neq -i$) $\Leftrightarrow$ $|x + (y - 1)i| = |x + (y + 1)i|$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + (y - 1)^2 =$ $x^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ là số thực.

c) *Cách 1 :* Để ý rằng $|\overline{z} - 3 + 4i| = |\overline{\overline{z} - 3 + 4i}| = |z - 3 - 4i|$ nên nếu gọi A là điểm biểu diễn số $3 + 4i$, M là điểm biểu diễn số z thì $|\overline{z} - 3 + 4i| = |\overrightarrow{AM}|$.

Vậy $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{AM}| \Leftrightarrow M$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Cách 2 : Viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = |(x-3) + (4-y)i|^2 = (x-3)^2 + (4-y)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y = 25.$

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về xây dựng trường số phức

Sau đây, nhắc lại ba cách xây dựng trường số phức thường được nói đến ở bậc đại học.

1. Coi tập hợp $\mathbb{C}$ là tập hợp $\mathbb{R}^2$ các cặp số thực (tức là mỗi số phức là cặp số thực (a, b) và hiển nhiên coi hai số phức $(a, b), (a', b')$ bằng nhau nếu $a = a'$, $b = b'$).

Định nghĩa phép toán cộng và nhân số phức bởi

$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$,

$(a, b).(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

Chứng minh được rằng $\mathbb{C}$ với hai phép toán đó làm thành một trường.

Đơn cấu trường $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$a \mapsto (a, 0)$$

cho phép đồng nhất $\mathbb{R}$ với ảnh của nó trong $\mathbb{C}$.

Đặt $i = (0, 1)$ thì viết được $(a, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) = a + bi$ (ở vế phải là phép cộng, nhân nói trên của các số phức).

Cách xây dựng đó là chặt chẽ, sáng sủa, nhưng trừu tượng (nhất là đối với học sinh THPT) và phép nhân được định nghĩa một cách khá áp đặt.

2. Coi $\mathbb{C}$ là tập hợp các ma trận cấp hai dạng $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b$ là số thực) với phép toán cộng, nhân các ma trận cấp hai.

Dễ thấy rằng đó là một vành giao hoán, có đơn vị và mọi ma trận khác 0 thuộc tập hợp $\mathbb{C}$ đều có ma trận nghịch đảo trong $\mathbb{C}$, tức là $\mathbb{C}$ là một trường.

Đồng nhất số thực $a \in \mathbb{R}$ với ma trận $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ trong $\mathbb{C}$ và coi i là ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì viết được $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a + bi.$

Chú ý : Khi $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ khác không, coi nó là ma trận của một biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^2$ thì đó là ma trận của một phép đồng dạng bảo tồn hướng, giữ bất động gốc O của $\mathbb{R}^2$ (hợp thành của một phép quay gốc O (góc quay là một acgumen của số phức đang xét) với phép vị tự tâm O, hệ số vị tự $\sqrt{a^2 + b^2}$ (môđun của số phức đó)).

Cách xây dựng này chặt chẽ, sáng sủa, phép cộng, phép nhân được định nghĩa một cách tự nhiên nhưng phải dựa vào các hiểu biết về ma trận (tuy chỉ cấp hai).

3. Nhìn theo quan điểm mở rộng trường, có thể coi $\mathbb{C}$ là vành thương $[X]\big/(X^2+1)$ của vành đa thức một ẩn X (trên trường số thực) chia cho iđêan sinh bởi đa thức $X^2 + 1$. Dễ thấy rằng nó còn là một trường (do đa thức $X^2 + 1$ bất khả quy).

Đây là một cách xây dựng đẹp đẽ về mặt lí thuyết nhưng khá "cao cấp".