D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh thông hiểu điều kiện (chủ yếu là điều kiện đủ) để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng, một nửa khoảng hoặc một đoạn.

Kĩ năng

Giúp học sinh vận dụng một cách thành thạo định lí về điều kiện đủ của tính đơn điệu để xét chiều biến thiên của hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Sau định lí về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng trong §1 là chú ý sau :

Khoảng I trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết : Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó. Chẳng hạn :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Đây là một chú ý quan trọng. Ta chỉ giới thiệu một trường hợp. Tuy nhiên, dựa vào đó, học sinh có thể nêu được các khẳng định tương tự cho các trường hợp khác : Điều kiện để hàm số nghịch biến hoặc không đổi trên một đoạn, điều kiện để hàm số đơn điệu hoặc không đổi trên một nửa khoảng.

Một vài ví dụ sau đây cho thấy sự cần thiết và lợi ích của việc xét tính đơn điệu của hàm số không chỉ trên một khoảng mà cả trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

Đây là một ví dụ cùng với bài giải của một học sinh.

Ví dụ. Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ là đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số có đạo hàm

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2.$$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy hàm số đồng biến từ $-\infty$ đến 1 trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$, sau đó đồng biến từ 1 đến $+\infty$ trên khoảng $(-1\ ;\ +\infty)$ thành thử hàm số đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Lập luận vừa nêu là không chặt chẽ. Đúng ra phải chứng tỏ hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty\ ;\ -1]$ và $[-1\ ;\ +\infty)$ từ đó mới suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tính đồng biến của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ được chứng minh một cách chặt chẽ tương tự như ví dụ 3 trong bài.

Dưới đây là ví dụ và bài giải của một học sinh.

Ví dụ. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

trên các đoạn và nửa khoảng sau đây :

a) $\left[-2 ; -\frac{1}{2}\right]$; b) $\left[-\frac{1}{2} ; 1\right]$; c) $[1 ; 3)$.

Giải

c) Trên nửa khoảng $[1 ; 3)$ không có điểm nào tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm. Vì $f'(2) = 36 > 0$ nên $f'(x) > 0$ trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Vì vậy $\min\limits_{[1 ; 3)} f(x) = f(1) = 4$.

Thực ra trong lời giải trên đây, không cần đến điều kiện $f'(1)$ dương để khẳng định hàm số f đồng biến trên $[1 ; 3)$. Vả lại, lập luận tương tự như thế không ứng dụng được để khẳng định hàm số f đồng biến chẳng hạn, trên $[0 ; 3)$ vì ở đây, $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0 ; 3)$ nhưng $f'(0) = 0$.

2. Có thể phát biểu điều kiện đủ để một hàm số là đơn điệu hoặc không đổi trên một khoảng, một đoạn và nửa khoảng chung trong định lí dưới đây (theo ngôn ngữ Toán cao cấp ở đại học).

Giả sử K là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là một hàm số liên tục trên K và có đạo hàm tại mọi điểm trong của K (tức là điểm thuộc K nhưng không phải là đầu mút của K). Khi đó

a) Nếu $f'(x) > 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) < 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f lấy giá trị không đổi trên K.

3. Khi xét chiều biến thiên của hàm số, để tránh nặng nề, ta thường chỉ nói tới tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp việc xét chiều biến thiên của hàm số trên một đoạn hoặc một nửa khoảng tỏ ra rất tiện dụng trong thực hành. Ta xét ví dụ sau :

Ví dụ. Chứng minh rằng

$$x > \ln(1 + x) \text{ với mọi } x > 0.$$

Giải

Hàm số $f(x) = x - \ln(1 + x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} > 0 \text{ với mọi } x \in (0 ; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên $[0 ; +\infty)$ và ta có

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x > 0.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Khi xét chiều biến thiên của hàm số, không nhất thiết phải ghi các giá trị tương ứng của hàm số.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết ví dụ 2.

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Giúp học sinh biết vận dụng định lí trong bài để xét chiều biến thiên của hàm số.

Cách giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

$$y' = x^2 - 3x + 2 \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$-2\frac{1}{6}$	$\searrow$	$-2\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

H2 *Mục đích :* Giúp học sinh biết vận dụng điều khẳng định nêu trong nhận xét để xét chiều biến thiên của hàm số.

Giải

Ta có

$$y' = 10x^4 + 20x^3 + 10x^2 = 10x^2(x+1)^2.$$

$y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hai điểm $x = -1$ và $x = 0$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 0)$.

b) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; \dfrac{1}{3}\right)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3} ; 1\right)$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -\sqrt{3})$ và $(\sqrt{3} ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3} ; 0)$ và $(0 ; \sqrt{3})$.

d) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$.

f) Hàm số xác định trên đoạn $[-2 ; 2]$.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2\ ;\ 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ 2)$. (Có thể nói rằng hàm số đồng biến trên đoạn $[-2\ ;\ 0]$ và nghịch biến trên đoạn $[0\ ;\ 2]$).

2. a) $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq -2$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(-2\ ;\ +\infty)$.

b) $y' = \dfrac{-x^2 - 2x - 5}{(x+1)^2} < 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(-1\ ;\ +\infty)$.

3. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 17 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4. $y' = a - 3x^2$.

• Nếu $a < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a = 0$ thì $y' = -3x^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra với $x = 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\ ;\ \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$. Vậy $a > 0$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a \leq 0$.

5. $f'(x) = x^2 + 2ax + 4$.

$\Delta' = a^2 - 4$.

• Nếu $a^2 - 4 < 0$ hay $-2 < a < 2$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a = 2$ thì $f'(x) = (x + 2)^2 > 0$ với mọi $x \neq -2$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Tương tự, nếu $a = -2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a < -2$ hoặc $a > 2$ thì $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1\ ;\ x_2)$. Các giá trị này của a không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2 \leq a \leq 2$.