§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu định nghĩa căn bậc hai của số phức ;

– Biết cách đưa việc tìm căn bậc hai của số phức về việc giải một hệ hai phương trình hai ẩn thực ;

– Biết cách giải một phương trình bậc hai.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Tính được căn bậc hai của số phức ;

– Giải được phương trình bậc hai với hệ số phức.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Không nên dùng kí hiệu $\sqrt{\ }$ để chỉ căn bậc hai của số phức vì có hai căn bậc hai của số phức $w \neq 0$ và không có ưu tiên nào chọn một trong chúng (để ý

rằng trong khi $\mathbb{R}$ là một trường sắp thứ tự thì $\mathbb{C}$ không phải là một trường sắp thứ tự). Nếu dùng kí hiệu đó học sinh dễ nhầm lẫn khi áp dụng máy móc các quy tắc tính căn bậc hai của số thực cho căn bậc hai của số phức (xem bài tập đố vui 22). Do đó cần nhấn mạnh định nghĩa z là một căn bậc hai của w có nghĩa là $z^2 = w$.

2. Sách không đưa ra công thức căn bậc hai tổng quát của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ vì không muốn đòi hỏi học sinh phải nhớ công thức này (hơi phức tạp). (Vả lại về sau, khi đã có dạng lượng giác của số phức thì việc tìm căn bậc hai trở nên không có khó khăn gì (xem bài tập 26, ứng dụng thứ hai của công thức Moa-vrơ ở cuối chương và bài đọc thêm về căn bậc n của số phức)). Chỉ cần hướng dẫn học sinh biết cách đưa việc tìm căn bậc hai của $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ về việc giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$; mỗi nghiệm $(x ; y)$ của nó cho một căn bậc hai $x + yi$. Thông qua hai ví dụ, sách giới thiệu phương pháp giải đơn giản hệ phương trình này là sử dụng "phép thế", thay $y = \dfrac{b}{2x}$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ để được một phương trình trùng phương đối với x (mà hệ số của x^4 trái dấu với hệ số tự do).

3. Việc tìm căn bậc hai của số thực là dễ nhưng ở đây SGK muốn chứng minh rằng chỉ có hai căn bậc hai đó trong $\mathbb{C}$.

4. Mục đích của mục 1 tóm lại là chứng minh rằng số phức $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau khác 0 và nói cách tìm chúng.

5. Về mục 2, phương trình bậc hai (với hệ số phức), sách đưa ngay công thức nghiệm. Nếu cần, giáo viên có thể nhắc lại rằng khi $A \neq 0$ ta luôn viết được $Az^2 + Bz + C = A\left[\left(z + \dfrac{B}{2A}\right)^2 - \dfrac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right]$, và từ đó có công thức nghiệm.

6. Sau khi chứng minh rằng phương trình bậc hai (với hệ số phức) luôn có nghiệm, ta có thể nói tiếp một cách tự nhiên đến định lí cơ bản của đại số (coi như một cách kết thúc việc giới thiệu các hệ thống số ở bậc Trung học).

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Mục 1 :	1 tiết
Mục 2 :	1 tiết
Luyện tập :	1 tiết

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Ôn lại định nghĩa căn bậc hai và sử dụng nội dung phần ghi nhớ.

Trả lời : z_1z_2 là một căn bậc hai của w_1w_2 vì $(z_1z_2)^2 = z_1^2z_2^2 = w_1w_2$. Từ đó các căn bậc hai của w_1w_2 là $\pm z_1z_2$.

H2 *Mục đích :* Hai cách chứng minh (một cách sử dụng công thức nghiệm, một cách dùng tính chất của số phức liên hợp) đều giúp ôn tập.

Trả lời

• *Cách 1 :* Theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A \neq 0)$,

a) Khi biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$ thì các nghiệm đều là số thực nên nếu z_0 là một nghiệm thì $\overline{z_0} = z_0$ cũng là một nghiệm ;

b) Khi biệt thức $\Delta < 0$ thì hai nghiệm có dạng

$$-\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A}i \text{ và } -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A}i,$$

là hai số phức liên hợp nên nếu z_0 là một nghiệm thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm.

• *Cách 2 :* Nếu z_0 là một nghiệm tức là

$$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0,$$

thì ta có

$$\overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = \overline{0} = 0.$$

Nhưng do A, B, C là số thực nên $\overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = A\overline{z_0^2} + B\overline{z_0} + C$, vậy $A\overline{z_0^2} + B\overline{z_0} + C = 0$ tức là $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình đang xét.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

17. • Để tìm các căn bậc hai của $-i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vậy $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

Chú ý : Nếu đã biết một căn bậc hai của i là $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ (xem ví dụ 2 trong SGK) thì do đã biết một căn bậc hai của -1 là i nên theo kết quả của **H1**, các căn bậc hai của $-i$ là $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)i = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

• Để tìm các căn bậc hai của $4i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là $(\sqrt{2} ; \sqrt{2}), (-\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$ nên $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1 + i)$.

Chú ý : Đã biết một căn bậc hai của i là $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ thì theo **H1**, các căn bậc hai của $4i$ là $\pm 2.\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \pm\sqrt{2}(1 + i)$.

• Dễ thấy $-4 = (2i)^2$ nên các căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$.

• Để tìm căn bậc hai của $1 + 4\sqrt{3}i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Hệ đó tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{12}{x^2} = 1 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x}. \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(2; \sqrt{3})$, $(-2; -\sqrt{3})$, từ đó

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}i,\ z_2 = -2 - \sqrt{3}i.$$

18. z là một căn bậc hai của w thì $z^2 = w$ nên suy ra $\left|z^2\right| = |z|^2 = |w|$, từ đó $|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{|w|}$.

19. a) $z^2 = z + 1 \Leftrightarrow \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$. Vậy $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = -4$. Vậy $z = -1 \pm 2i$.

c) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$ có biệt thức

$$\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i = (1 + i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm là

$$\frac{1}{2}\left[-1 + 3i + (1 + i)\right] = 2i \text{ và } \frac{1}{2}\left[-1 + 3i - (1 + i)\right] = -1 + i.$$

20. a) Công thức nghiệm của phương trình bậc hai $\dfrac{-B \pm \delta}{2A}$ $(\delta^2 = B^2 - 4AC)$ chứng tỏ $z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A}$, $z_1 z_2 = \dfrac{C}{A}$ tức là công thức Vi-ét vẫn còn đúng.

b) Theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai, dễ thấy hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $z_1 + z_2 = \alpha$, $z_1 z_2 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cho trước) phải là hai nghiệm của phương trình bậc hai (đối với z) $z^2 - \alpha z + \beta = 0$. Vậy hai số cần tìm là các nghiệm của phương trình $z^2 - (4 - i)z + 5(1 - i) = 0$. Biệt thức

$\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$. Để tìm căn bậc hai của Δ ta cần giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là (2 ; 3) và (–2 ; –3) nên các căn bậc hai cần tìm bằng $\pm(2 + 3i)$. Vậy hai nghiệm của phương trình bậc hai đang xét là $\frac{1}{2}\left[4 - i \pm (2 + 3i)\right]$ tức là $3 + i$ và $1 - 2i$.

c) Nếu phương trình $z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp, $z_2 = \overline{z_1}$, thì theo công thức Vi-ét, $B = -(z_1 + z_2) = -(z_1 + \overline{z_1})$ là số thực, $C = z_1 z_2 = z_1\overline{z_1}$ là số thực.

Điều ngược lại không đúng vì nếu B, C thực thì khi $\Delta = B^2 - 4C > 0$ hai nghiệm là hai số thực phân biệt, chúng không phải là liên hợp với nhau. (Khi $\Delta \leq 0$ thì phương trình mới có hai nghiệm là hai số phức liên hợp).

21. a) $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$ nên nó có hai nghiệm là $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ (xem bài tập 17).

$z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 = 0$ nên nó có nghiệm kép là $z_3 = i$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là z_1, z_2, z_3.

b) Hai số z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + Bz + 3i = 0$ khi và chỉ khi ta có : $z_1 + z_2 = -B$, $z_1 z_2 = 3i$ (xem bài tập 20). Từ đó $z_1^2 + z_2^2 = 8$ có nghĩa là $(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = B^2 - 6i = 8$ tức là $B^2 = 8 + 6i = (3 + i)^2$, vậy $B = \pm(3 + i)$.

22. Lập luận a) là đúng.

Lập luận b) sai ở chỗ : nếu z_1 là một căn bậc hai của w_1, z_2 là một căn bậc hai của w_2 thì $z_1 z_2$ là một trong hai căn bậc hai của $w_1 w_2$; vậy ở đây $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ chỉ là một căn bậc hai của $(-1)(-1) = 1$ (để ý rằng có hai căn bậc hai của 1 là 1 và –1) , các kí hiệu $\sqrt{(-1)(-1)}$ và $\sqrt{1}$ chưa xác định.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Công thức tính căn bậc hai của số phức $w = a + bi$

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có nghĩa là $z^2 = w$ tức là $(x + yi)^2 = a + bi$. Vậy để tìm căn bậc hai của w cho trước, cần giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Rõ ràng hệ đó tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 4x^2y^2 = b^2 \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = b^2 \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases}$$

(nói xy cùng dấu với b có nghĩa là $xyb \geq 0$).

Vậy các căn bậc hai cần tìm của $w = a + bi$ là :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\, i\right) \text{ khi } b \geq 0$$

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\, i\right) \text{ khi } b < 0.$$

Trường hợp riêng (suy ra được từ các công thức đó) :

Khi $b = 0$, $a \geq 0$, hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\sqrt{a}$.

Khi $b = 0$, $a < 0$, hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\sqrt{-a}\, i$.

Chú ý : Để tìm căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$, thông qua hai ví dụ bằng số, SGK giới thiệu cách giải đơn giản hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$$

bằng cách thay $y = \dfrac{b}{2x}$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất để đến được phương trình trùng phương đối với x là

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Từ đó, rõ ràng $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ và suy ra

$$y^2 = x^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Để ý đến xy cùng dấu với b, ta cũng đi đến được công thức tổng quát về căn bậc hai nêu trên. Tuy nhiên SGK chỉ dừng lại ở khẳng định có đúng hai căn bậc hai của $w \neq 0$ là hai số phức đối nhau (mà không trình bày chứng minh đầy đủ).