§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh hiểu rõ

– Định nghĩa cực đại và cực tiểu của hàm số.

– Điều kiện cần và đủ để hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu, từ đó hiểu được hai quy tắc 1 và 2 để tìm cực trị của hàm số.

Kĩ năng

Rèn luyện cho học sinh vận dụng thành thạo hai quy tắc 1 và 2 để tìm cực trị của hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khi giới thiệu định nghĩa cực trị của hàm số, cần lưu ý cho học sinh rằng điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp $\mathcal{D}$. Nói một cách khác, điều kiện cần để $x_0 \in \mathcal{D}$ là một điểm cực trị của hàm số f là $\mathcal{D}$ chứa một lân cận của điểm x_0 (tức là một khoảng chứa điểm x_0).

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên $[0 ; +\infty)$.

Ta có $f(x) > f(0)$ với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là một điểm cực tiểu của hàm số vì tập hợp $[0 ; +\infty)$ không chứa bất kì một lân cận nào của điểm 0.

2. Trong định lí 2 không thể bỏ qua giả thiết "hàm số f liên tục tại điểm x_0". Ví dụ sau đây cho ta thấy điều đó.

Ví dụ. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ với } x \leq 0 \\ x \text{ với } x > 0, \end{cases}$$

xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$;

$$f'(x) = -1 \text{ với mọi } x < 0 \text{ và } f'(x) = 1 \text{ với mọi } x > 0.$$

Tuy nhiên điểm $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số f. Không thể áp dụng định lí 2 cho trường hợp này vì hàm số f không liên tục tại điểm $x = 0$.

3. Ta biết rằng điều kiện cần để hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 là hàm số có đạo hàm triệt tiêu tại x_0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0. Trong bước 2 của quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số, có nêu :

Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Tuy nhiên, theo định lí 2, nếu hàm số f liên tục tại điểm x_0, có đạo hàm trên các khoảng $(a ; x_0)$, $(x_0 ; b)$ và nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số f. Vì vậy, trong thực hành, muốn chứng tỏ x_0 là một điểm cực trị của hàm số, ta chỉ cần xét dấu của $f'(x)$ trên hai khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$ mà không cần xét xem tại điểm x_0 hàm số f có hay không có đạo hàm.

Chẳng hạn, khi giải ví dụ 2 : "Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$", không cần chứng minh rằng hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Một ví dụ khác :

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \sqrt{|x|}(x - 3).$$

Giải

Dễ thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}(x-3) \text{ với } x < 0 \\ \sqrt{x}(x-3) \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Với $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} > 0.$

Với $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	-2	↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; Giá trị cực đại là $f(0) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; Giá trị cực tiểu là $f(1) = -2$.

Có thể chứng minh được rằng hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Tuy nhiên không cần phải trình bày điều này trong bài giải.

4. Trong Giải tích 12, sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000, một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị được nêu trong định lí 2, trang 58 :

"Dấu hiệu II

ĐỊNH LÍ 2. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp hai tại x_0 và $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số. Hơn nữa,*

1) *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu,*

2) *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.*"

Giả thiết "hàm số f có đạo hàm cấp hai liên tục tại điểm x_0" là không cần thiết. Chú ý rằng trong định lí 3 của bài này (§2, Giải tích 12 nâng cao) không có giả thiết đó. Định lí 3 sẽ được chứng minh trong phần V. Bổ sung kiến thức trong bài này.

Có thể dùng $y_{CĐ}$, y_{CT} để chỉ giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến về phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết định lí 2.

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Giải tương tự như ví dụ 1.

Giải

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \text{ với mọi } x \neq 0\text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-7	↘	‖	↘	1	↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-2) = -7$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(2) = 1$.

H2 Mục đích của hoạt động này là giúp học sinh vận dụng quy tắc 2 để tìm cực trị của hàm số.

Giải

Ta có

$$f'(x) = 4\cos 2x\text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(x) = -8\sin 2x$;

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 \text{ với } k = 2n \\ 8 \text{ với } k = 2n + 1, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy hàm số f đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$;

$f\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) = 2\sin 2\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) - 3 = -1$ và đạt cực tiểu tại các điểm

$x = \dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -5, \ n \in \mathbb{Z}.$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

11. a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -3$; $f(-3) = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -\dfrac{7}{3}$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, $f(-1) = -2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; $f(1) = 2$.

d) Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) \text{ với } x < 0 \\ x(x+2) \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Với $x < 0$, $f'(x) = -2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Với $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2 > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	‖	+	
$f(x)$		↗	1	↘	0	↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = 1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; $f(0) = 0$.

e) $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\dfrac{2}{15}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$1\dfrac{13}{15}$	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = 2\dfrac{2}{15}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1\dfrac{13}{15}$.

f) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $f(0) = -3$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; $f(2) = 1$.

12. a) Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$.

$y' = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ với mọi $x \in (-2 ; 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2}$; $y(-\sqrt{2}) = -2$ và đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2}$; $y(\sqrt{2}) = 2$.

b) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $y(0) = 2\sqrt{2}$.

c) Áp dụng quy tắc 2.

$y' = 1 - 2\cos 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$y'' = 4\sin 2x.$

• $y''\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$.

Do đó hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\frac{\pi}{6} + k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

• $y''\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0.$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

d) Áp dụng quy tắc 2.

$y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi$ hoặc $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x.$

• $y''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4\cos 2k\pi = 2\cos k\pi + 4 > 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do đó hàm số đã cho đạt cực tiểu tại các điểm $x = k\pi$;

$$y(k\pi) = 3 - 2\cos k\pi - \cos 2k\pi = 2 - 2\cos k\pi.$$

• $y''\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} + 4\cos\dfrac{4\pi}{3} = 6\cos\dfrac{2\pi}{3} = -3 < 0$. Do đó hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=3-2\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}=4\frac{1}{2}.$$

13. $f(0)=0 \Rightarrow d=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ nên $f'(0)=0$.

Từ đó ta có $c=0$.

$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ nên $f'(1)=0$.

Từ đó ta có $3a+2b=0$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0, \end{cases}$$

ta được $a=-2$; $b=3$.

Kiểm tra lại : $f(x)=-2x^3+3x^2$.

$f'(x)=-6x^2+6x$, $f''(x)=-12x+6$;

$f''(0)=6>0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

$f''(1)=-6<0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Đáp số : $a=-2$, $b=3$, $c=0$, $d=0$.

14. $a=3$, $b=0$, $c=-4$.

15. Ta viết hàm số dưới dạng

$$y=x-m^2+\frac{1}{x-m} ;$$

$$y'=1-\frac{1}{(x-m)^2}=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2},\ x\neq m.$$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow x=m-1$ hoặc $x=m+1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	$-m^2+m-2$	↘	‖	↘	$-m^2+m+2$	↗	

Với mọi giá trị của m, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = m - 1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = m + 1$.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Chứng minh định lí 3. Ta sẽ chỉ ra rằng định lí 3 là một hệ quả của định lí 2. Thật vậy, giả sử hàm số f thoả mãn các giả thiết của định lí 3, tức là hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$. Khi đó, theo định nghĩa đạo hàm cấp hai, ta có

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0.$$

Do đó, tồn tại một số $h > 0$ sao cho $[x_0 - h\ ;\ x_0 + h] \subset (a\ ;\ b)$ và

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \qquad (1)$$

với mọi $x \in (x_0 - h\ ;\ x_0 + h) \setminus \{x_0\}$.

Vì $x - x_0 < 0$ với mọi $x \in (x_0 - h\ ;\ x_0)$ nên từ (1) suy ra

$$f'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (x_0 - h\ ;\ x_0)$$

Vì $x - x_0 > 0$ với mọi $x \in (x_0\ ;\ x_0 + h)$ nên từ (1) suy ra

$$f'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (x_0\ ;\ x_0 + h).$$

Như vậy, $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x tăng, qua điểm x_0. Do đó, theo định lí 2, hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh tương tự : Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ mối quan hệ vừa nêu giữa hai định lí 2 và 3 suy ra rằng quy tắc 1 mạnh hơn quy tắc 2. Ví dụ sau cho thấy trong một số trường hợp có thể áp dụng được quy tắc 1 nhưng không áp dụng được quy tắc 2.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^4$.

Ta có $f'(x) = 4x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$f''(x) = 12x^2\ ;\ f''(0) = 0.$$

Ta không áp dụng được quy tắc 2 và trở lại quy tắc 1 : Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x tăng, qua điểm 0 nên hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. (Hiển nhiên từ định nghĩa cực trị của hàm số, có thể thấy ngay rằng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = x^4$).