§2. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu được cách định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ thông qua giới hạn, thấy được sự mở rộng tự nhiên của định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ sang định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ.

– Nhớ các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các tính chất của luỹ thừa để tính toán.

– Vận dụng được công thức lãi kép để giải một số bài tập thực tiễn.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ a^{α} được định nghĩa là giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$, trong đó $\left(r_n\right)$ là một dãy số hữu tỉ hội tụ về α. Để định nghĩa được như vậy, ta cần chứng minh hai khẳng định sau :

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ hội tụ ;

– Nếu $\left(s_n\right)$ là một dãy số hữu tỉ bất kì cũng hội tụ về α thì

$$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n}.$$

Việc chứng minh hai khẳng định trên không quá phức tạp, sẽ được trình bày trong phần bổ sung kiến thức. Tuy nhiên đối với học sinh phổ thông, không đủ cơ sở để chứng minh hai khẳng định đó. Vì vậy chỉ cần cho học sinh nắm được sơ lược ý tưởng xây dựng khái niệm này. Yêu cầu chủ yếu của tiết này là cho học sinh tính toán bằng cách áp dụng các tính chất của luỹ thừa và tính gần đúng bằng máy tính.

2. Trong SGK không trình bày chứng minh các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực (xem phần bổ sung kiến thức). Đối với học sinh phổ thông, chỉ cần cho học sinh nhớ và áp dụng được các tính chất của phép toán của luỹ thừa để tính toán.

Lưu ý rằng các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực tương tự như các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên. Chẳng hạn, ta đã có $a^m.a^n = a^{m+n}$ với m, n là những số nguyên thì bây giờ cũng có $a^x.a^y = a^{x+y}$ với x, y là những số thực.

3. Trước đây, HS đã quá quen rằng luỹ thừa với số mũ nguyên dương không có đòi hỏi gì về cơ số. Giờ đây, đối với từng loại số mũ, có những đòi hỏi khác nhau về cơ số. Do đó giáo viên cần có những tổng kết, lưu ý đặc biệt về cơ số để học sinh không mắc phải sai lầm khi vận dụng.

4. Công thức lãi kép có liên quan chặt chẽ với khái niệm luỹ thừa, được sử dụng rộng rãi không những trong lĩnh vực tiền tệ mà còn được sử dụng trong các lĩnh vực khác của tự nhiên và xã hội.

III – GỢI Ý DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian :*** 1 tiết lí thuyết.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Áp dụng tính chất của luỹ thừa với số mũ thực để tính toán.

Giải

$$\left(2^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3}.2^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 2^{\frac{3\sqrt{5}-3}{1+\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 2^{\frac{9\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\left(\sqrt{5}+1\right)}} = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2}.$$

H2 *Mục đích :* Cho HS hiểu và vận dụng công thức lãi kép.

Giải

Sau 5 năm mới rút lãi thì người đầu tư thu được một số tiền là

$$100.(1+0,13)^5 - 100 \approx 84,244 \text{ (triệu đồng)}.$$

• Để có đủ thời gian giảng dạy bài này trong 1 tiết, có thể tiến hành như sau :

– Đối với mục 1, giáo viên giới thiệu nhanh khái niệm luỹ thừa với số mũ vô tỉ và tính chất của luỹ thừa với số mũ thực. Cho học sinh nắm được khái niệm qua ví dụ 1 và áp dụng các tính chất qua ví dụ 2 và $\boxed{\textbf{H1}}$.

– Đối với mục 2, giáo viên cho học sinh đọc trước nội dung phần này ở nhà. Trên lớp giáo viên có thể bắt đầu bằng ví dụ 3 vì công thức lãi kép (1), học sinh đã được làm quen ở lớp 11 (chương Dãy số).

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

12. Điều kiện B.

13. Điều kiện C.

14. Điều kiện $0 < a < 1$.

15. $\left(0,5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 0,5^{\sqrt{16}} = 0,5^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.

$2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}}.2^{3\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}} = 2^2 = 4$.

$3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 3^{2\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}} = 3^1 = 3$.

16. $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^2}{a^1} = a.$

$a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}\left(a^{-1}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}.a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a.$

17. Sau 5 năm người gửi thu được một số tiền (cả vốn lẫn lãi) là

$$15(1 + 0,0756)^5 \approx 21,59 \text{ (triệu đồng)}.$$

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về định nghĩa và tính chất của luỹ thừa với số mũ thực

1) Sau khi định nghĩa và chứng minh các tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của một số dương $a \neq 1$, ta đã định nghĩa a^{α} với α vô tỉ như sau (ở đây

chỉ trình bày cho trường hợp $a > 1$ vì khi $0 < a < 1$ có thể đưa về trường hợp $a > 1$ bằng cách xét $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}}$) :

• Lấy dãy số hữu tỉ tăng (r_n) sao cho $\lim r_n = \alpha$ rồi xét dãy luỹ thừa $\left(a^{r_n}\right)$ thì ta thấy

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ là một dãy tăng ;

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ bị chặn trên (chẳng hạn bởi a^M, M là một số hữu tỉ tuỳ ý lớn hơn α).

Do dãy $\left(a^{r_n}\right)$ tăng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$, (mà $\mathbb{R}$ là một trường sắp thứ tự đầy) nên dãy đó có giới hạn là một số thực nào đó.

• Nếu xét một dãy số hữu tỉ tăng (r'_n) sao cho $\lim r'_n = \alpha$ thì có thể chứng minh được $\lim a^{r'_n} = \lim a^{r_n}$.

Vậy ta có thể định nghĩa $a^{\alpha} = \lim a^{r_n}$ trong đó (r_n) là một dãy số hữu tỉ tăng sao cho $\lim r_n = \alpha$.

2) Từ định nghĩa đó, khi α là số vô tỉ, có thể chứng minh được rằng

– Với các số hữu tỉ r, s sao cho $r < \alpha < s$ thì $a^r < a^{\alpha} < a^s$;

– Với dãy số hữu tỉ tuỳ ý (r_n) sao cho $\lim r_n = \alpha$ thì tồn tại giới hạn $\lim a^{r_n}$ và $\lim a^{r_n} = a^{\alpha}$.

3) Như thế, ta đã xây dựng được hàm số liên tục : $x \mapsto a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và dễ dàng chứng minh được rằng các tính chất quen thuộc của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ vẫn còn đúng cho luỹ thừa với số mũ thực tuỳ ý. Chẳng hạn, để chứng minh $a^{x+y} = a^x.a^y$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta lấy các dãy số hữu tỉ (r_n), (s_n) sao cho $\lim r_n = x$, $\lim s_n = y$, khi đó rõ ràng dãy $(r_n + s_n)$ là dãy số hữu tỉ thoả mãn $\lim(r_n + s_n) = x + y$ và ta có

$$a^{x+y} = \lim a^{r_n + s_n} = \lim a^{r_n} . \lim a^{s_n} = a^x . a^y .$$

Chú ý : Có thể nói rằng cách định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ của số dương $a \neq 1$ đã trình bày là nhằm xây dựng một hàm số liên tục $x \mapsto a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ mà với x hữu tỉ thì được luỹ thừa với số mũ hữu tỉ đã biết. Người ta nói vắn tắt điều đó là thác triển liên tục hàm số $x \mapsto a^x$ từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{R}$.