§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

Hiểu hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm : Phương pháp đổi biến số và phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Kĩ năng

Vận dụng được hai phương pháp này để giải các bài toán tìm nguyên hàm tương đối đơn giản tương tự với các ví dụ trong SGK.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Nói chung, không có một quy tắc chung để biết, khi nào dùng phương pháp đổi biến, khi nào dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần. Thậm chí nếu phải dùng phương pháp đổi biến số thì cũng không có quy tắc chung để xác định nên đổi biến số như thế nào. Trong phạm vi chương trình phổ thông, ta chỉ xét những bài toán tìm nguyên hàm đơn giản, trong đó biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$ trong trường hợp này ta đổi biến $u = u(x)$. Nếu phương pháp đổi biến số phức tạp hơn thì giáo viên phải chỉ ra cho học sinh cách đổi biến số.

2. Học sinh nên nhớ công thức (2) trong SGK khi thực hành giải toán.

Vậy là trong đẳng thức $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ khi thay biến số độc lập x bởi hàm số u thì đẳng thức vẫn còn đúng.

3. Về công thức lấy nguyên hàm từng phần

Có nhiều cách chọn $u(x)$ và $v'(x)$ sao cho $f(x) = u(x)v'(x)$ nhưng ta phải khéo chọn $u(x)$ và $v'(x)$ để :

v' là hàm mà ta dễ tìm được nguyên hàm v ;

Việc tìm nguyên hàm của vu' đơn giản hơn so với việc tìm nguyên hàm của f. Đó chính là nghệ thuật sử dụng phương pháp tìm nguyên hàm từng phần.

4. Vài gợi ý về tìm nguyên hàm từng phần

Nếu phải tìm nguyên hàm của $f(x) = x^n e^{kx}$; $f(x) = x^n \sin(ax + b)$ hay $f(x) = x^n \cos(ax + b)$ ta chọn $u(x) = x^n$ và $v'(x)$ là nhân tử còn lại.

5. Công thức lấy nguyên hàm từng phần

Công thức $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ (1)

có nội dung như sau :

Để tìm một nguyên hàm của hàm số $y = u(x)v'(x)$ ta lấy $u(x)v(x)$ trừ đi một nguyên hàm của hàm số $y = u'(x)v(x)$.

Không được viết công thức (1) dưới dạng

$$\int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x), \tag{2}$$

(nhận được bằng chuyển vế hình thức).

Thật vậy, (2) được phát biểu là : Tổng của mỗi nguyên hàm F của uv' và mỗi nguyên hàm G của $u'v$ bằng uv.

Song điều này không đúng.

Thật vậy $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) = (u(x)v(x))'$ do đó $F(x) + G(x) = u(x)v(x) + C$ với C là hằng số.

Thành thử (1) có dạng tương đương là

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) + C. \tag{3}$$

6. Nếu áp dụng công thức lấy nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm của f ta đi đến

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

thì từ (4) suy ra

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{G(x)}{2} + C. \tag{5}$$

Thật vậy nếu F là một nguyên hàm của f thì theo (3) ta có

$F(x) = G(x) - (F(x) + C)$ với C là hằng số nào đó. Suy ra $F(x) = \dfrac{G(x)}{2} - \dfrac{C}{2}$.

Vậy $y = \dfrac{G(x)}{2}$ là một nguyên hàm của f. Do đó ta có (5).

7. Đôi khi sử dụng những phương pháp khác nhau, ta đi đến các kết quả về hình thức có vẻ khác nhau nhưng thực chất chúng là một.

Ví dụ. Tìm nguyên hàm của $y = \sin x \cos x$.

Cách 1. (Đổi biến)

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Cách 2. (Tìm nguyên hàm từng phần)

Chọn $u(x) = \cos x$ do đó $v'(x) = \sin x$.

Vậy $v(x) = -\cos x$; $u'(x) = -\sin x$. Từ đó ta có

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x \, dx.$$

Theo (5) ta được đáp số là $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$.

Cách 3. (dùng biến đổi lượng giác) Ta có $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

Suy ra kết quả là $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

Ba đáp số này đều đúng cả, vì chúng sai khác nhau một hằng số. Thật vậy

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C_1\right) - \left(-\frac{\cos^2 x}{2} + C_2\right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} + C = \frac{1}{2} + C.$$

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C_1\right) - \left(-\frac{\cos 2x}{4} + C_2\right) = \frac{2\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x)}{4} + C = \frac{1}{4} + C.$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian :*** Bài này gồm 2 tiết.

- Tiết đầu dành cho phương pháp đổi biến số.

- Tiết sau dành cho phương pháp tìm nguyên hàm từng phần.

• Gợi ý về hoạt động trên lớp

Các hoạt động trong bài này có chung mục đích là hình thành kĩ năng tìm nguyên hàm bằng các phương pháp đã học.

H1 *Giải*. Ta có

$$2x(x^2+1)^3 = (x^2+1)^3(x^2+1)'.$$

Đặt $u = u(x) = x^2 + 1$ ta có

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C.$$

H2 *Giải*. Đặt $u = 1 + x^2$. Khi đó $xe^{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^u\,du$. Từ đó cho ta kết quả là

$\frac{1}{2}e^{1+x^2} + C$.

H3 *Giải*. Chọn $u(x) = \frac{x}{3}$; $v'(x) = e^{2x}$. Khi đó $u'(x) = \frac{1}{3}$, $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho ta

$$\int \frac{x}{3}e^{2x}\,dx = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{12}e^{2x} + C.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

5. a) Đổi biến $u = 1 - x^3$. Ta có $\frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = \frac{-3du}{\sqrt{u}}$.

Kết quả là $-6(1-x^3)^{\frac{1}{2}} + C$.

b) Đổi biến $u = 5x + 4$. Kết quả : $\frac{2}{5}\sqrt{5x+4} + C$.

c) Đổi biến $u = 1 - x^2$. Ta có $x\sqrt[4]{1-x^2}\,dx = -\frac{u^{\frac{1}{4}}\,du}{2}$.

Kết quả là $-\frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{4}}+C$.

d) Đổi biến $u = 1+\sqrt{x}$. Ta có $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2}$.

Kết quả là : $-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C$.

6. a) Đặt $u = x$, $v' = \sin\frac{x}{2}$. Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho ta kết quả là $-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+C$.

b) Đặt $u = x^2$, $v' = \cos x$. Ta có $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Tính $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng công thức lấy nguyên hàm từng phần đặt $u = x$, $v'(x) = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = -\cos x$ cho ta

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x+\sin x + C.$$

Thay vào ta được kết quả

$$x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

c) Đặt $u = x$, $v' = \mathrm{e}^x$.

Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho kết quả $x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

d) Đặt $u = \ln(2x)$, $v' = x^3$ ta được kết quả là $\frac{x^4\ln(2x)}{4}-\frac{x^4}{16}+C$.