§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu rõ khái niệm acgumen của số phức ;

– Hiểu rõ dạng lượng giác của số phức ;

– Biết công thức nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác ;

– Biết công thức Moa-vrơ và ứng dụng vào lượng giác.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Biết tìm acgumen của số phức ;

– Biết đổi từ dạng đại số sang dạng lượng giác của số phức ;

– Tính toán thành thạo phép nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác ;

– Sử dụng được công thức Moa-vrơ.

– NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khi giảng dạy, giáo viên cần để ý nét nổi bật của bài này là ý nghĩa hình học của phép nhân (chia) các số phức được thể hiện rõ ràng nhờ dạng lượng giác của chúng. Dưới dạng lượng giác, để nhân (chia) hai số phức ta lấy tích (thương) các môđun và tổng (hiệu) các acgumen của chúng.

Nhiều ứng dụng hình học, đại số, lượng giác của các số phức nhờ đến dạng lượng giác của chúng, trong đó công thức đáng chú ý là công thức Moa-vrơ.

2. Về nguyên tắc, việc đổi từ dạng đại số $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sang dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ không gặp khó khăn gì lớn. Khi biết biểu diễn hình học số phức z bởi điểm M trong mặt phẳng phức thì $r = |z|$ là khoảng cách OM, φ là số đo một góc lượng giác (Ox, OM) (tính đa trị của acgumen của z do tồn tại vô số góc lượng giác cùng tia đầu tia cuối đã được học sinh làm quen ở lớp 10, lớp 11). (Máy tính bỏ túi thường có cả phím thực hiện riêng phép chuyển đổi này, đó cũng là chuyển đổi từ toạ độ vuông góc $(a ; b)$ sang toạ độ cực $(r ; \varphi)$ của điểm M trong mặt phẳng).

Tuy nhiên học sinh thường quên đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$, đôi khi nhầm cả dấu +, – trước chữ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ và có khi đổi chỗ hai chữ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Giáo viên nên nhắc nhở học sinh những điều này qua những ví dụ, câu hỏi, bài tập.

3. SGK đã nêu một ứng dụng của công thức Moa-vrơ vào lượng giác là tính $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ theo các luỹ thừa của $\cos\varphi$ và $\sin\varphi$, có đề cập đến căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác. Căn bậc n của số phức chỉ được giới thiệu trong bài đọc thêm.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

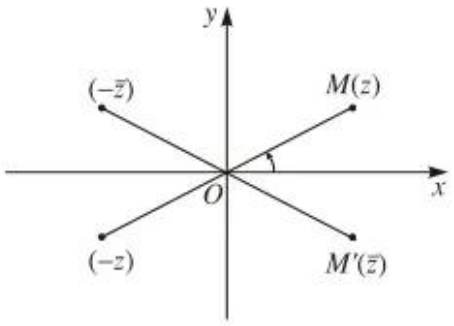
• ***Dự kiến phân phối thời gian***

Mục 1 : 1 tiết

Mục 2 và mục 3 : 1 tiết

Luyện tập : 1 tiết

Ôn tập chương : 2 tiết.



Hình 4.7

• ***Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Dùng biểu diễn hình học của số phức để tìm acgumen của nó.

Trả lời : z biểu diễn bởi $\overrightarrow{OM}$ thì $-z$ biểu diễn bởi $-\overrightarrow{OM}$ nên có acgumen là $\varphi + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\bar{z}$ biểu diễn bởi M' đối xứng với M qua Ox nên có acgumen là $-\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $-\bar{z}$ biểu diễn bởi $-\overrightarrow{OM'}$ nên có acgumen $-\varphi + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, còn $\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}}\bar{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ có cùng acgumen với $\bar{z}$ tức là $-\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. (h.4.7).

H2 *Mục đích :* Để chuẩn bị cho chứng minh định lí ngay sau đó.

Trả lời : Dễ thấy $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. (xem bài tập 8) hoặc viết

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) \text{ thì được}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

Trong **H1** đã nói $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ có cùng acgumen với $\bar{z}$ là $-\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

27. a) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;

$-z = r(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi))$;

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}z}z = \frac{1}{|z|^2}z = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$kz = kr(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ khi $k > 0$,

$kz = -kr(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi))$ khi $k < 0$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$-z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$kz = 2k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ nếu $k > 0$,

$kz = -2k\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ nếu $k < 0$.

28. a) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$,

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Từ đó suy ra :

$(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,

$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$.

b) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$,

$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Từ đó suy ra

$2i(\sqrt{3} - i) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(cũng có thể tính $2i(\sqrt{3} - i) = 2(1 + i\sqrt{3}) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$).

c) $\dfrac{1}{2+2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

d) $\sin\varphi + i\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right).$

29. $(1+i)^{19} = (C_{19}^0 + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^4 i^4 + ... + C_{19}^{16} i^{16} + C_{19}^{18} i^{18}) +$

$+ (C_{19}^1 i + C_{19}^3 i^3 + ... + C_{19}^{19} i^{19}),$

phần thực ở vế phải là $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

Mặt khác, $(1+i)^{19} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{19}$

$= (\sqrt{2})^{19}\left(\cos\dfrac{19\pi}{4} + i\sin\dfrac{19\pi}{4}\right)$

$= (\sqrt{2})^{19}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^9 + 2^9 i.$

Vậy $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18} = -2^9 = -512.$

Cách khác : Để ý rằng $(1+i)^2 = 2i$, ta có

$(1+i)^{19} = (2i)^9(1+i)$

$= 2^9 i(1+i)$

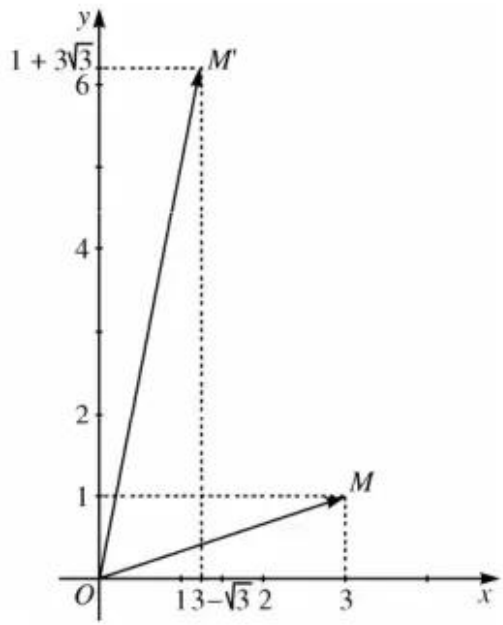
$= 2^9(-1+i).$

Từ đó suy ra số cần tìm là -2^9.

30. a) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\left[3 - \sqrt{3} + \left(1 + 3\sqrt{3}\right)i\right](3-i)}{10}$

$= 1 + \sqrt{3}i.$

b) Xét tia Ox thì ta có (hình 4.8)



Hình 4.8

sđ $(OM, OM') =$ sđ $(Ox, OM') -$ sđ $(Ox, OM) = \varphi' - \varphi =$ acgumen $\frac{z'}{z}$ (sai khác $k2\pi$) (trong đó φ và φ' theo thứ tự là acgumen của z và z'). Từ đó do $\frac{z'}{z} = 1 + \sqrt{3}i$ có acgumen là $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, nên góc lượng giác (OM, OM') có số đo $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

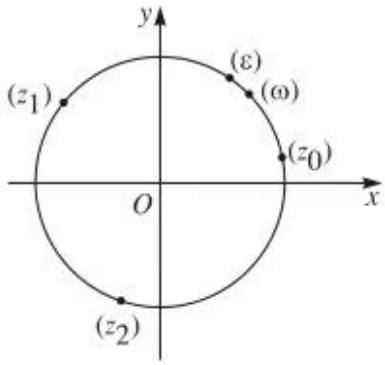
31. a) Ta có $\omega = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,

$z_0^3 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^3 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \omega$,

$z_1^3 = (z_0\varepsilon)^3 = z_0^3\varepsilon^3 = z_0^3 = \omega$ (dễ thấy $\varepsilon^3 = 1$),

$z_2^3 = (z_0\varepsilon^2)^3 = z_0^3\varepsilon^6 = z_0^3 = \omega$.

b) Xem hình 4.9 (để ý rằng một acgumen của $z_0\varepsilon$ là $\frac{3\pi}{4}$, một acgumen của $z_0\varepsilon^2$ là $-\frac{7\pi}{12}$).



Hình 4.9

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

A – Dạng mũ của số phức và công thức Ơ-le

1. Để diễn tả ngắn gọn và sử dụng thuận lợi công thức nhân hai số phức dưới dạng lượng giác, người ta còn dùng dạng mũ của số phức như sau (được trình bày trong nhiều SGK nước ngoài).

Với số phức z có môđun bằng 1, ta viết $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ và đặt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Khi đó, rõ ràng ta có

$$e^{i\varphi}e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$$

và công thức Moa-vrơ trở thành

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \text{ (với mọi số nguyên } n).$$

Với số phức z có môđun $|z| = r > 0$, có acgumen φ, viết

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} ;$$

dạng đó gọi là dạng mũ của số phức $z \neq 0$. Công thức nhân hai số phức trở thành

$$(re^{i\varphi})(r'e^{i\varphi'}) = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}.$$

2. Dễ thấy

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} ;$$

các công thức này gọi là công thức Ơ-le.

Sử dụng các công thức này cùng với các tính chất của dạng mũ nói trên, có thể dễ dàng giải được một số bài toán lượng giác, chẳng hạn :

a) Công thức hạ bậc : Ví dụ, ta có

$$\sin^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}[e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi} - 3e^{i\varphi}e^{-i\varphi}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})]$$

$$= -\frac{1}{4}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = \frac{1}{4}(-\sin 3\varphi + 3\sin\varphi).$$

b) Công thức biến đổi tích thành tổng : Ví dụ, ta có

$$\cos\alpha\cos\beta = \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right).\left(\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

c) Công thức biến đổi tổng thành tích : Ví dụ, ta có

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\, 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

từ đó suy ra

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3. Trong các giáo trình hàm biến phức ở bậc Đại học đã xây dựng hàm số biến số phức

$$z = a + ib \mapsto e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

Đó là một hàm nguyên, đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết hàm biến phức.

B – Số phức với hình học phẳng

Về hình học, số phức giúp khảo sát sâu sắc nhiều điều trong mặt phẳng. Ngay ở bậc Trung học phổ thông, dùng số phức cũng có thể diễn tả một số vấn đề của hình học sơ cấp trong mặt phẳng, đặc biệt về các phép dời hình, phép đồng dạng trong mặt phẳng (một số SGK nước ngoài có trình bày những điều này).

Dễ thấy biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M tuỳ ý biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số phức z' sao cho :

1) $z' = z + \beta$ (β là số phức cho trước) là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức β.

2) $z' - z_0 = \alpha(z - z_0)$ (α là số phức cho trước, $|\alpha| = 1$, z_0 là số phức cho trước) là phép quay tâm A (biểu diễn số phức z_0) với góc quay là một acgumen của α. Điều đó suy ra từ : $|\overrightarrow{AM'}| = |z' - z_0| = |\alpha||z - z_0| = |z - z_0| = |\overrightarrow{AM}|$ và khi $M \neq A$, một góc lượng giác tia đầu AM, tia cuối AM' có số đo là một acgumen của $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = \alpha$.

Từ đó suy ra phép biến đổi xác định bởi $z' = \alpha z + \beta$ ($|\alpha| = 1$, β là số phức tuỳ ý cho trước) là một phép tịnh tiến khi $\alpha = 1$ và một phép quay khi $\alpha \neq 1$ (vì khi $\alpha \neq 1$ thì $z' = \alpha z + \beta$ có thể được viết thành $z' - z_0 = \alpha(z - z_0)$ với $z_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$).

3) $z' - z_0 = k(z - z_0)$ (k thực khác 0, z_0 là số phức cho trước) là phép vị tự tâm A (biểu diễn z_0) với hệ số vị tự k.

Từ đó suy ra phép biến đổi xác định bởi $z' = \alpha z + \beta$ (α, β là số phức cho trước, $\alpha \neq 0$) là một phép tịnh tiến khi $\alpha = 1$, còn khi $\alpha \neq 1$, nó là hợp thành của một phép quay (với góc quay là một acgumen của α) với một phép vị tự cùng tâm (với hệ số vị tự là $|\alpha|$), tức là một phép đồng dạng trong mặt phẳng.