§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh hiểu rõ định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực và biết ứng dụng đạo hàm để tìm các giá trị đó.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Có kĩ năng thành thạo trong việc dùng bảng biến thiên của một hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

– Giải một số bài toán liên quan tới việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Sau định nghĩa, đã nhắc lại điều sau đây :

Muốn chứng tỏ số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$, cần chứng tỏ

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in \mathcal{D}$;

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

Điều kiện b) là quan trọng, không được bỏ qua. Một số học sinh đã không chú ý đến nó, do đó đã mắc sai lầm.

Ta hãy xét bài tập 16 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Có học sinh lập luận như sau :

Vì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\min\limits_{x\in} f(x) = 0.$

Vì $\sin^4 x \leq 1$ và $\cos^4 x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$f(x) \leq 1 + 1 = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $\max\limits_{x\in} f(x) = 2.$

Các kết luận đó là sai. Tại sao ? Thật ra, ta có $\min\limits_{x\in} f(x) = \dfrac{1}{2}$ và $\max\limits_{x\in} f(x) = 1.$

Học sinh đó mắc sai lầm vì đã không để ý đến điều kiện b).

2. Hàm số có thể không đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên một tập hợp số thực cho trước.

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0 ; 1]$. Vì $f(x) \geq f(1) = 1$ với mọi $x \in (0 ; 1]$ nên $\min\limits_{x\in(0;1]} f(x) = 1.$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số lấy các giá trị lớn tuỳ trên $(0 ; 1]$. Do đó hàm không đạt giá trị lớn nhất trên $(0 ; 1]$.

Với hàm số $g(x) = 2x$, ta có

$$0 < g(x) < 2 \text{ với mọi } x \in (0 ; 1).$$

Tuy nhiên hàm số không đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0 ; 1)$.

3. Sau khi giải các bài tập 17a), b), d), e), có thể nêu nhận xét :

Nếu f là một hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất tại một điểm cực trị hoặc tại một trong hai đầu mút a, b.

Do đó trong trường hợp này, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ theo quy tắc đã nêu trong bài.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Mục đích của hoạt động $\boxed{\textbf{H1}}$ là giúp học sinh lập bảng biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó trên một tập hợp số thực cho trước.

H1 Giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$						$\searrow$	3	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 3.$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(1\ ;+\infty)$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

16. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$. Vậy $\max\limits_{x\in} f(x) = 1.$

$f(x) \ge \frac{1}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{x\in} f(x) = \frac{1}{2}.$

17. a) $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$			-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	10		

$\min\limits_{x\in[-2\,;\,3]} f(x) = f(-1) = -6$; $\max\limits_{x\in[-2\,;\,3]} f(x) = f(3) = 10.$

b) $\min\limits_{x\in[-4\,;\,0]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -5\dfrac{1}{3}$;

$\max\limits_{x\in[-4\,;\,0]} f(x) = f(-3) = f(0) = -4$.

c) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$					‖	↘	2	↗	

$\min\limits_{x\in(0\,;\,+\infty)} f(x) = f(1) = 2$. Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0\,;\,+\infty)$.

d) $\min\limits_{x\in[2\,;\,4]} f(x) = f(4) = -4$; $\max\limits_{x\in[2\,;\,4]} f(x) = f(2) = 4.$

e) $\min\limits_{x\in[0\,;\,1]} f(x) = f(0) = 2$; $\max\limits_{x\in[0\,;\,1]} f(x) = f(1) = 3\dfrac{2}{3}.$

f) $\max\limits_{x\in(0\,;\,2]} f(x) = f(2) = 1\dfrac{1}{2}$. Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $(0\,;\,2]$.

18. a) Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$,

$$y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1\,;\,1]$. Đó cũng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 4t + 2\ ;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3

$\min\limits_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$; $\max\limits_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(1) = 3.$

Do đó

$\min\limits_{x\in} y = -\frac{3}{2}$; $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3.$

($y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $y = 3 \Leftrightarrow \sin x = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$).

b) Ta có $y = 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4$,

$$y = -\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 5.$$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \le t \le 1$;

$$y = f(t) = -t^2 - \frac{t}{2} + 5.$$

$f'(t) = -2t - \frac{1}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$

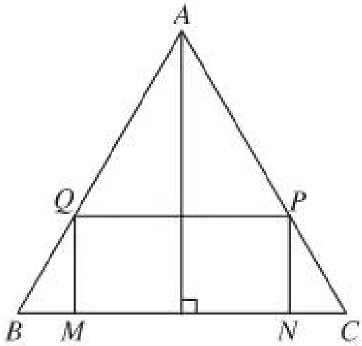
Bảng biến thiên :

t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$4\frac{1}{2}$	↗	$5\frac{1}{16}$	↘	$3\frac{1}{2}$

$$\min_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(1) = 3\frac{1}{2}\ ;\ \max_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5\frac{1}{16}.$$

Do đó

$$\min_{x\in} y = 3\frac{1}{2}\ ;\ \max_{x\in} y = 5\frac{1}{16}.$$



Hình 1.1

19. Đặt $BM = x$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$, ta được $MN = a - 2x$; $QM = x\sqrt{3}$. Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S(x) = MN.QM = (a-2x)x\sqrt{3}\ ;$$

$$S(x) = \sqrt{3}(ax - 2x^2).$$

Bài toán quy về :

Tìm giá trị lớn nhất của $S(x)$ trên khoảng $\left(0\,;\,\frac{a}{2}\right)$.

Ta có $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x)$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$.

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	$\searrow$	

Vậy $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = \frac{a}{4}$ và giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật là $\max\limits_{x\in\left(0\,;\,\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$.

20. Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = 480x - 20x^2 \text{ trên khoảng } (0\ ;\ +\infty).$$

(Biến số n lấy các giá trị nguyên dương được thay bằng biến số x lấy các giá trị trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$).

$$f'(x) = 480 - 40x\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12.$$

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 12$. Từ đó suy ra rằng trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $n = 12$.

Vậy muốn thu hoạch được nhiều nhất sau một vụ thì trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ phải thả 12 con cá.