§3. TÍCH PHÂN (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Biết định nghĩa tích phân ;

– Hiểu được hai ứng dụng quan trọng trong hình học và cơ học của tích phân là tính diện tích hình thang cong và quãng đường đi được của một vật.

– Hiểu và nhớ được các tính chất cơ bản của tích phân.

Kĩ năng

– Biết tính tích phân bằng định nghĩa.

– Biết áp dụng các tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân.

– Giải các bài toán tính diện tích hình thang cong và tìm quãng đường đi được của vật bằng tích phân.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Về mặt lịch sử, sự ra đời của phép tính tích phân xuất phát từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. (Tích phân có nghĩa là : Tích hợp các phần nhỏ). Tuy nhiên vì lí do sư phạm trong SGK tích phân được định nghĩa thông qua nguyên hàm coi như là một công thức tính toán. Thành thử việc học sinh nắm được định nghĩa này khá dễ dàng.

2. Tuy nhiên cách định nghĩa này có những hạn chế sau :

– HS không thấy được bản chất của kí hiệu tích phân, không thấy được lí do tại sao tích phân lại có ứng dụng rộng rãi như vậy. Do đó học sinh chỉ biết tính tích phân theo công thức một cách máy móc và sẽ không biết áp dụng tích phân vào các tình huống thực tiễn.

– GV khó giải thích cho học sinh nguồn gốc của kí hiệu $\int$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dạy trong 3 tiết.

Tiết 1 : Bài toán tính diện tích hình thang cong và tính quãng đường đi của vật.

Tiết 2, 3 : Định nghĩa tích phân, các tính chất cơ bản của tích phân trong đó khoảng 1,5 tiết dành cho các tính chất cơ bản của tích phân.

**** Gợi ý về hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Giúp HS hiểu rõ thêm về bài toán 1.

$F(x) = \dfrac{x^5}{5}$. Do đó $S = F(2) - F(1) = \dfrac{31}{5}$.

H2 *Mục đích :* Chứng minh tính "hợp lệ" của định nghĩa tích phân.

$G(x) = F(x) + C$. Do đó

$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

H3 *Mục đích :* Giúp HS bước đầu hiểu ý nghĩa cơ học của tích phân.

Kết luận suy ra từ định nghĩa và ý nghĩa cơ học của đạo hàm.

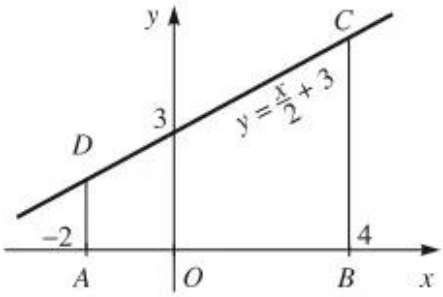
Mục đích của các hoạt động **H4** và **H5** là giúp HS khắc sâu thêm khái niệm và tính chất của tích phân.

H4 Chứng minh dễ dàng bằng cách áp dụng trực tiếp định nghĩa.

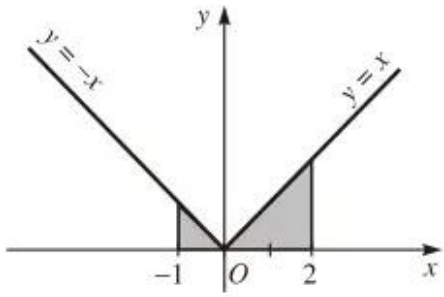
H5 Ta có $\int_0^b (2x - 4)\,dx = (x^2 - 4x)\Big|_0^b = b^2 - 4b = 0$. Giải ra ta được $b = 0$ và $b = 4$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

10. a) Tích phân đó bằng diện tích hình thang *ABCD* với cạnh nghiêng là đường thẳng $y = \frac{x}{2} + 3$ (h.3.1). Diện tích đó là $(2 + 5)\frac{6}{2} = 21$.



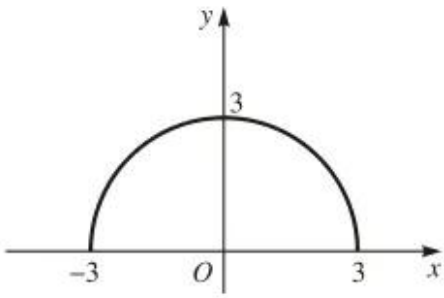
Hình 3.1



Hình 3.2

b) Từ hình 3.2 ta thấy hình *A* gồm hai tam giác. Do đó tích phân bằng diện tích của *A* và là $2 + 0,5 = 2,5$.

c) Tích phân bằng diện tích nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ (h.3.3). Đây là đường tròn tâm là gốc toạ độ bán kính là 3. Do đó diện tích nửa đường tròn là $9\frac{\pi}{2} = 4,5\pi$.



Hình 3.3

11. a) $\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = 4 + 6 = 10$;

b) $3.(-4) = -12$;

c) $6 - 8 = -2$;

d) $4.6 - 8 = 16$.

12. $\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^0 f(x)\,dx + \int_0^4 f(x)\,dx = -3 + 7 = 4$.

13. a) $\int_a^b f(x)\,dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Do đó $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Ta có $h(x) \geq 0$ trên $[a ; b]$. Theo a) ta có

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0. \qquad (1)$$

Mặt khác $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

14. a) Quãng đường $S = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t)\,dt = \frac{3\pi}{4} - 1$.

b) Gọi t_0 là thời điểm vật dừng lại. Ta có $v(t_0) = 0$. Suy ra $t_0 = 16$.

Vậy $S = \int_0^{16} (160 - 10t)\,dt = 1280\,(m)$.

15. Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật. Ta có $v'(t) = a(t) = 3t + t^2$.

Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$. Vì $v(0) = 10$ nên suy ra $C = 10$.

Vậy $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$. Thành thử quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \frac{4300}{3} \text{ (m)}.$$

16. Gọi $v(t)$ là vận tốc của viên đạn. Ta có $v'(t) = a(t) = -9,8$.

Suy ra $v(t) = -9,8t + C$. Vì $v(0) = 25$ nên suy ra $C = 25$. Vậy $v(t) = -9,8t + 25$.

Gọi T là thời điểm viên đạn đạt độ cao lớn nhất. Tại đó viên đạn có vận tốc bằng 0. Vậy $v(T) = 0$. Suy ra $T = \frac{25}{9,8} \approx 2,55$ (giây).

Quãng đường viên đạn đi được cho tới thời điểm $T = 2,55$ (giây) là

$$S = \int_0^T (-9,8t + 25)\,dt = -9,8\frac{T^2}{2} + 25T \approx 31,89\text{(m)}.$$

Vậy quãng đường viên đạn đi được cho đến khi rơi xuống đất là $2S \approx 63,78$(m).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

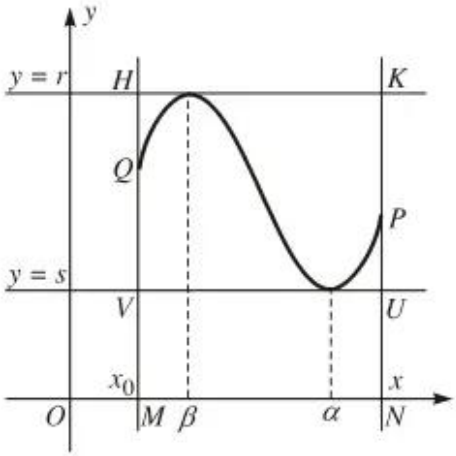
1. *Chứng minh định lí 1*

Kí hiệu $S(x)$ (với $x \in K = [a\ ;\ b]$, $x > a$) là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số f, trục hoành và hai đường thẳng đi qua các điểm a và x trên trục hoành và vuông góc với trục hoành. Như vậy ta có một hàm số S xác định trên khoảng $J = \{x > a\ ;\ x \in K\}$ với $S(a) = 0$. Diện tích S của hình thang cong nói trong định lí chính là $S(b)$. Ta phải chứng minh

$S(b) = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm tuỳ ý của f.

Trước hết ta chứng minh S là một nguyên hàm của f trên J.

Thật vậy, giả sử $x_0 \in J$ là một điểm tuỳ ý cố định. Xét điểm $x > x_0$. Khi đó $S(x) - S(x_0)$ là diện tích hình thang cong $MNPQ$.



Hình 3.4

Gọi r, s tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số f trên đoạn $[x_0 ; x]$. Giả sử $s = f(\alpha)$ và $r = f(\beta)$. Dựng hình chữ nhật $MNUV$ với một cạnh MN, cạnh kia có độ dài s. Dựng hình chữ nhật $MNKH$ với một cạnh MN, cạnh kia có độ dài r (h.3.4).

Vì toàn bộ cạnh cong PQ nằm giữa hai đường thẳng $y = s$ và $y = r$ nên ta có

$$S_{MNUV} < S_{MNPQ} < S_{MNKH}$$

hay $$s(x - x_0) < S(x) - S(x_0) < r(x - x_0)$$

hay $$f(\alpha) < \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(\beta). \qquad (1)$$

Khi x dần tới x_0 thì α và β cũng dần tới x_0.

Vì f liên tục tại x_0 nên suy ra

$$\lim_{x \to x_0} f(\alpha) = \lim_{x \to x_0} f(\beta) = f(x_0). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\lim_{x \to x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Tương tự với $x < x_0$, ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ hay $S'(x_0) = f(x_0)$.

Vì x_0 tuỳ ý nên $S'(x) = f(x)$ với mọi $x \in J$.

Vì F là nguyên hàm của f trên J nên tồn tại hằng số C để $F(x) = S(x) + C$.

Suy ra $F(a) = S(a) + C = C$ (do $S(a) = 0$). Vậy $F(b) = S(b) + F(a)$ hay $S(b) = F(b) - F(a)$. Định lí được chứng minh.

2. *Khái niệm diện tích hình thang cong*

Trong SGK và trên đây ta có sử dụng khái niệm diện tích hình thang cong mà không nêu ra một định nghĩa chính xác khái niệm đó (có lẽ, đối với học sinh, không nên đi quá sâu vào vấn đề này). Có thể trình bày sơ lược điều đó như sau :

Giả sử ta đã biết diện tích $s(P)$ của một hình (miền) đa giác P trong mặt phẳng với các tính chất quen thuộc.

Một hình phẳng $\mathcal{H}$ gọi là đo được theo nghĩa Jordan (viết tắt là J - đo được) nếu cận trên của diện tích các đa giác $P \subset \mathcal{H}$ bằng cận dưới của diện tích các đa giác $Q \supset \mathcal{H}$; khi đó, cận trên (và cận dưới) ấy được gọi là diện tích của $\mathcal{H}$ (theo nghĩa Jordan).

Có thể chứng minh được rằng nếu $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ là hàm số liên tục, lấy giá trị không âm thì hình thang cong $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\right\}$ là J - đo được và diện tích của nó (theo nghĩa Jordan) là diện tích hình thang cong đã nói trong SGK. (Ý tưởng chứng minh gần với chứng minh định lí 1 ở trên).

Chú ý : Dễ thấy hình thang cong $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le g(x)\right\}$,

$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \end{cases}$ là hình không J - đo được.

3. *Tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới*

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b thuộc K $(a < b)$. Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = b\ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Gọi m_k và M_k là giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f trên $[x_k, x_{k+1}]$. Kí hiệu

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k),$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k).$$

U_n và L_n được gọi là tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới cấp n của hàm số f trên $[a ; b]$.

Người ta đã chứng minh được rằng

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$