§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu và nhớ được các công thức (1) và (2) trong SGK đó là cơ sở của hai phương pháp tính tích phân ;

– Biết hai phương pháp cơ bản để tính tích phân : Phương pháp đổi biến số và phương pháp tính tích phân từng phần.

Kĩ năng

Vận dụng được hai phương pháp này để giải các bài toán tính tích phân, với mức độ khó tương tự với các ví dụ trong SGK.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Ta có hai cách tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

Cách 1 : Áp dụng công thức (1) từ trái sang phải.

Cách 2 : Áp dụng công thức (1) từ phải sang trái.

Đối với việc tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số, ta chỉ trình bày một cách (do không giới thiệu khái niệm hàm ngược). Cách này tương ứng với cách 1 của tính tích phân.

2. Trong công thức đổi biến số, giáo viên nhắc lại cho học sinh rằng, giá trị của tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu ta dùng làm biến số lấy tích phân.

3. Bản chất của phương pháp tích phân từng phần như sau :

Giả sử ta cần tính $\int_a^b f(x)\,dx$ *. Ta chọn u(x) và v'(x) sao cho f(x) = u(x)v'(x). Khi đó theo công thức tích phân từng phần, việc tính* $\int_a^b f(x)\,dx$ *quy về tính* $\int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Có nhiều cách chọn $u(x)$ và $v'(x)$ sao cho $f(x) = u(x)v'(x)$. Tương tự như phương pháp tìm nguyên hàm từng phần ta phải khéo chọn $u(x)$ *và* $v'(x)$.

4. Các ví dụ và bài tập trong bài này đều rất đơn giản. Giáo viên không nên khai thác các mẹo mực, tiểu xảo trong vấn đề tính tích phân.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian :*** Bài này chia làm 2 tiết.

Tiết đầu dành cho phương pháp đổi biến số.

Tiết thứ hai dành cho phương pháp tích phân từng phần.

**** Gợi ý về hoạt động trên lớp :***

H1 *Giải*

Ta có $\sqrt{2x+3} = \frac{1}{2}\sqrt{2x+3}.(2x+3)'$.

Đặt $u = 2x + 3$ ta có $u(1) = 5$, $u(3) = 9$. Từ đó

$$I = \frac{1}{2}\int_5^9 \sqrt{u}\,du = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\right)\ u^{\frac{3}{2}}\Big|_5^9 = \frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}).$$

H2 *Giải*. Đặt $x = \sin t$. Ta có $0 = \sin 0$ và $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$.

Vì $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = dt$ với $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$ do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$.

H3 *Giải*. Đặt $u = x$, $v' = \sin x$, suy ra $u' = 1$ và $v = -\cos x$. Ta có

$$I = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + 1 = 1.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Kí hiệu I là tích phân cần tính trong các bài tập từ bài 17 đến bài 25

17. a) Đổi biến $u = x + 1$. Khi đó $I = \int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;

b) Đổi biến $u = \tan x$. Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Khi đó $\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}$;

c) Đặt $u = 1 + t^4$. Khi đó $I = \int_1^2 \frac{u^3\,du}{4} = \frac{15}{16}$;

d) Đặt $u = 4 + x^2$. Khi đó $I = \int_4^5 \frac{5du}{2u^2} = \frac{1}{8}$;

e) Đặt $u = 1 + x^2$. Khi đó $I = \int_1^4 \frac{2\,du}{u^{\frac{1}{2}}} = 4.$

f) Đặt $u = 1 - \cos 3x$. Khi đó $I = \int_0^1 \frac{u\,du}{3} = \frac{1}{6}.$

18. a) Đặt $u = \ln x$, $v' = x^5$ suy ra $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^6}{6}$.

Khi đó $I = \left(\frac{x^6 \ln x}{6}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5\,dx}{6} = \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{7}{4}.$

b) Đặt $u = x + 1$, $v' = e^x$ suy ra $u' = 1$, $v = e^x$.

Khi đó $I = \left((x+1)e^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e$.

c) Đặt $u = \cos x$, $v' = e^x$ suy ra $u' = -\sin x$, $v = e^x$.

Khi đó $I = \left(\cos x.e^x\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = -1 - e^{\pi} + J$. Đặt $u = \sin x$, $v' = e^x$;

Khi đó $J = \left(\sin x.e^x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = -I$. Vậy $I = -1 - e^{\pi} - I$.

Suy ra $I = -\dfrac{1 + e^{\pi}}{2}$.

d) Đặt $u = x$, $v' = \cos x$. $I = \left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Dạng vi phân và công thức đổi biến số của tích phân

1. Biểu thức $f(x)dx$ dưới dấu nguyên hàm thường được coi là một dạng vi phân bậc một.

Cụ thể : Giả sử J là một khoảng, đoạn hay nửa khoảng (tức là một tập con liên thông) trong $\mathbb{R}$, $f : \underset{x \mapsto f(x)}{J \to \mathbb{R}}$ là một hàm số trên J thì biểu thức $\omega = f(x)dx$ (dx là vi phân của biến số độc lập x) gọi là một *dạng vi phân bậc một trên J*.

Sau đây ta chỉ xét các dạng vi phân $f(x)dx$ với f là hàm số liên tục.

Với các phép toán cộng hai dạng vi phân và nhân một dạng vi phân với một số định nghĩa một cách tự nhiên, tập các dạng vi phân bậc một trên J làm thành một $\mathbb{R}$ - không gian vectơ, kí hiệu là $\Omega^1(J)$.

Ví dụ : Nếu $F : \underset{x \mapsto F(x)}{J \to \mathbb{R}}$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên J thì vi phân $d(F(x)) = F'(x)dx$ là một phần tử của $\Omega^1(J)$.

Khi đó nói "F là một nguyên hàm của f" (mà ta đã giả sử luôn luôn tồn tại F) tương đương với nói rằng "dạng vi phân $f(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(J)$ chính là $\mathrm{d}(F(x))$."

2. Cho $\varphi : \underset{t \mapsto x=\varphi(t)}{K \to J}$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên tập liên thông $K \subset \mathbb{R}$. Xét ánh xạ tuyến tính φ^* xác định bởi

$$\begin{aligned} &\varphi^* : \Omega^1(J) \to \Omega^1(K) \\ &\omega = f(x)\mathrm{d}x \mapsto \varphi^* \omega = f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Với $\omega = f(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(J)$, với $a, b \in J$, ta định nghĩa

$$\int_a^b \omega = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(b) - F(a)$$

thì công thức đổi biến số của tích phân (xác định) còn có thể được diễn tả thành :

với $\omega \in \Omega^1(J)$, với $\varphi : \underset{t \mapsto x=\varphi(t)}{K \to J}$ có đạo hàm liên tục thì với mọi $\alpha, \beta \in K$, ta có

$$\int_\alpha^\beta \varphi^* \omega = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \omega. \qquad (*)$$

Có thể chứng minh (*) nhờ vi phân của hàm hợp.

Thật vậy, viết $\omega = f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\big(F(x)\big)$ thì $\varphi^*\omega = \varphi^*\big(\mathrm{d}\big(F(x)\big)\big) = \mathrm{d}\big(\mathrm{F}\big(\varphi(\mathrm{t})\big)\big)$ nên vế trái của (*) là $\int_\alpha^\beta \varphi^* \omega = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\big(F\big(\varphi(\mathrm{t})\big)\big) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$ còn vế phải của (*) là $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \omega = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathrm{d}\big(\mathrm{F}(x)\big) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$.