§4. SỐ e VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Thấy được sự xuất hiện một cách tự nhiên của số e.

– Hiểu được lôgarit tự nhiên có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

Kĩ năng

Giúp học sinh vận dụng được định nghĩa, tính chất của lôgarit tự nhiên và phương pháp "lôgarit hoá" để tính toán và giải quyết một số bài toán thực tế.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trong các SGK trước đây, số e được đưa vào từ lớp 11, trong phần *Giới hạn của dãy số* như một minh hoạ cho định lí Vai-ơ-strat (Weierstrass) : "một dãy số tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì có giới hạn". Số e là giới hạn của dãy số tăng và bị chặn trên $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Trong chương trình và SGK lần này, do không đưa vào định lí Vai-ơ-strat về dãy số nên đã chuyển việc giới thiệu số e sang lớp 12 và thừa nhận sự tồn tại của giới hạn trên.

2. Cố gắng giới thiệu cho học sinh thấy nguồn gốc thực tế của số e để tránh sự áp đặt khi đưa ra định nghĩa số e.

3. Vì lôgarit tự nhiên được sử dụng rộng rãi cả trong lí thuyết và thực hành nên cần cho HS thấy ý nghĩa của vấn đề và rèn luyện kĩ năng tính toán.

4. Khi giải quyết các bài toán có sử dụng phương pháp "lôgarit hoá", cần hướng dẫn học sinh chọn cơ số một cách thích hợp (chẳng hạn, với các bài toán liên quan đến công thức lãi kép liên tục, nên lôgarit hoá theo cơ số e).

III – GỢI Ý DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian :*** 1 tiết lí thuyết.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Gọi S_m là số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 2 năm theo định kì m.

Với $m = 1$, ta có

$$S_1 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{1}\right)^{2.1} \approx 116,64 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Với $m = 2$, ta có

$$S_2 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{2.2} \approx 116,986 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Với $m = 4$, ta có

$$S_4 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{2.4} \approx 117,166 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Với $m = 12$, ta có

$$S_{12} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{2.12} \approx 117,289 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Với $m = 52$, ta có

$$S_{52} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{52}\right)^{2.52} \approx 117,337 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Với $m = 365$, ta có

$$S_{365} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{365}\right)^{2.365} \approx 117,349 \quad \text{(triệu đồng)}.$$

H2 *Mục đích :* Vận dụng công thức đổi cơ số và tính chất của lôgarit để so sánh hai lôgarit của cùng một số theo hai cơ số khác nhau và vận dụng tính chất của lôgarit để tính toán.

Giải

a) Với $0 < x < 1$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} > \ln x$ vì $\ln 10 > 1$ và $\ln x < 0$;

Với $x > 1$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} < \ln x$ vì $\ln 10 > 1$ và $\ln x > 0$.

b) $\log e^{2\ln\sqrt{10}} - \ln 10^{\log e^{-3}} = \log e^{\ln(\sqrt{10})^2} - \ln 10^{\log e^{-3}}$

$$= \log 10 - \ln e^{-3} = 1 + 3 = 4.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

42. Sai từ $\ln(2e) = \ln e + \ln e$.

43. Cho $a = \ln 2$, $b = \ln 5$. Khi đó :

$\ln 500 = \ln(2^2.5^3) = 2\ln 2 + 3\ln 5 = 2a + 3b$;

$\ln\dfrac{16}{25} = \ln(2^4.5^{-2}) = 4\ln 2 - 2\ln 5 = 4a - 2b$;

$\ln 6{,}25 = \ln(5^2.0{,}5^2) = 2\ln 5 + 2\ln 0{,}5 = 2\ln 5 - 2\ln 2 = 2b - 2a$;

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln 99 - \ln 100$$

$$= -\ln 100$$

$$= -\ln(2^2.5^2) = -2\ln 2 - 2\ln 5 = -2a - 2b.$$

44. Ta có $\dfrac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1)$

$$= \frac{7}{16}\ln(1 + \sqrt{2})^2 - 2\ln(\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{25}{16}\ln(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$= -\frac{25}{16}\ln(1 + \sqrt{2})^2 - \frac{25}{16}\ln(\sqrt{2} - 1)^2 = -\frac{25}{16}\ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)]^2$$

$$= -\frac{25}{16}\ln 1^2 = 0.$$

45. Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loài vi khuẩn này. Từ giả thiết $300 = 100.e^{5r}$ suy ra

$$r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5} \approx 0{,}2197,$$

tức là tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là 21,97% mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có

$$100.e^{10.0,2197} \approx 900 \text{ (con)}.$$

Từ 100 con, để có 200 con thì thời gian cần thiết là

$$t \approx \frac{\ln 200 - \ln 100}{0,2197} = \frac{\ln 2}{0,2197} \approx 3,15 \text{ (giờ)} = 3 \text{ giờ } 9 \text{ phút}.$$

46. Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân huỷ hàng năm của Pu^{239}.

Pu^{239} có chu kì bán huỷ là 24360 năm, do đó ta có

$$5 = 10.e^{r.24360}.$$

Suy ra

$$r = \frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -2,84543.10^{-5} \approx -0,000028.$$

Vậy sự phân huỷ của Pu^{239} được tính theo công thức

$$S = A.e^{-0,000028t}$$

trong đó S và A tính bằng gam, t tính bằng năm.

Theo bài ra, ta có

$$1 = 10.e^{-0,000028t}.$$

Suy ra

$$t = \frac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235 \text{ (năm)}.$$

Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam chất Pu^{239} sẽ phân huỷ còn 1 gam.