§5 ; §6. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG (2 tiết) VÀ THỂ TÍCH VẬT THỂ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

– Hiểu các công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số và hai đường thẳng vuông góc với trục hoành.

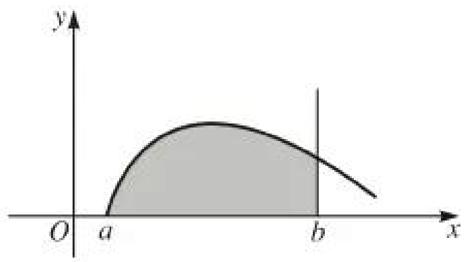
– Hiểu công thức tính thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay.

Kĩ năng

Ghi nhớ và vận dụng được các công thức nêu trong bài vào việc giải các bài toán cụ thể.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

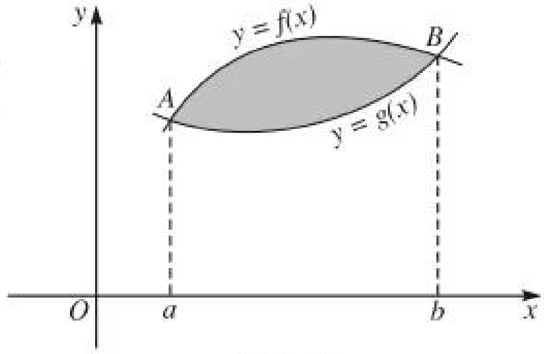
1. Cho hàm số $y = f(x)$ không âm. Giả sử đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $x = a$. Hình giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và đường thẳng $x = b$ $(a < b)$ gọi là tam giác cong (h.3.5). Tam giác cong cũng được xem là một trường hợp riêng của hình thang cong (đáy nhỏ bằng 0) do đó diện tích cũng được tính bởi công thức $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Hình 3.5

2. Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị cắt nhau tại hai điểm A, B. Giả sử a, b tương ứng là hoành độ các giao điểm A và B ($a < b$) (h.3.6). Khi đó diện tích hình phẳng H giới hạn bởi hai đồ thị ấy bằng

$$S(H) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x.$$



Hình 3.6

Để khử dấu giá trị tuyệt đối, ta giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên $[a ; b]$. Giả sử phương trình có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với $a = x_0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le x_{n+1} = b$. Khi đó $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên mỗi đoạn $[x_i ; x_{i+1}]$. Trên mỗi đoạn đó, ta có

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x \right|. \text{ Vậy } S(H) = \sum_{i=0}^{n} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x \right|.$$

Khi giải các bài toán tính diện tích và thể tích nếu không yêu cầu thì học sinh không nhất thiết phải vẽ hình, nhưng giáo viên nên khuyến khích học sinh vẽ hình nếu có thể.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** Dự kiến phân bố thời gian :*** Bài §5 và §6 chia làm 4 tiết.

Hai tiết đầu dành cho tính diện tích hình phẳng.

Hai tiết còn lại cho tính thể tích vật thể và khối tròn xoay.

*** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Giải*. Ta có $f(x) > 0$ trên $[0 ; 2]$ và $f(x) < 0$ trên $[2 ; 3]$. Vậy

$$S = \int_0^2 (4 - x^2) \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 4) \mathrm{d}x = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

H2 *Giải*. Trong đoạn $[-2 ; 2]$ đồ thị hàm số $y = x + 2$ nằm trên parabol $y = x^2 + x - 2$ do đó

$$S = \int_{-2}^{2} (x + 2 - x^2 - x + 2) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \mathrm{d}x = \frac{32}{3}.$$

$\boxed{\mathbf{H}}$ $V = \pi\int\limits_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{31\pi}{5}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

26. $S = \int\limits_0^{\frac{7\pi}{6}} (\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

27. a) $S = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Giao điểm của hai đồ thị có hoành độ là $x = 0$ và $x = 1$. Trong đoạn $[0\,;\,1]$ đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$. Vậy ta có

$$S = \int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

c) Trong miền $x \geq 0$ giao điểm của hai đồ thị có hoành độ là $x = 0$ và $x = 2$. Trong đoạn $[0\,;2]$ đồ thị hàm số $y = 2x^2$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Vậy ta có

$$S = \int\limits_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (4x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{64}{15}.$$

28. a) (Hình 3.7) $S = \int\limits_{-3}^{-2} (x^2 - 4 + x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{11}{3}$;

b) $S = \int\limits_{-2}^{1} (-x^2 - 2x - x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = 9$.

c) $S = \int\limits_{-2}^{4} \left|x^3 - 4x\right|\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{2} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x = 44$.

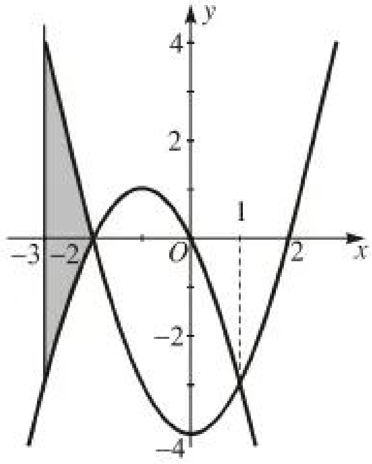
29. $V = \int\limits_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$.

30. $V = \int_0^{\pi} \frac{(2\sqrt{\sin x})^2\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}$.

31. $V = \pi\int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{6}$.

32. $V = \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\mathrm{d}y = 3\pi$.

33. $V = \pi\int_{-1}^1 5y^4\,\mathrm{d}y = 2\pi$.



Hình 3.7

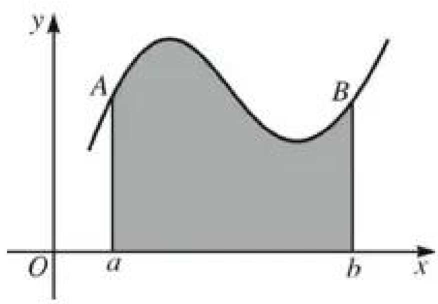
V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Ứng dụng tích phân để tính độ dài đường cong

Giả sử ta muốn tính độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm A tới điểm B. Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ. *Cho hàm số f có đạo hàm f' liên tục trên đoạn* $[a ; b]$. *Khi đó độ dài đường cong* $y = f(x)$ *từ điểm A đến điểm B là*

$$T = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$ *trong đó a, b (a < b) tương ứng là hoành độ các điểm A và B* (hình 3.8).



Hình 3.8

Chứng minh

Giả sử a, b tương ứng là hoành độ của A và B ($a < b$). Chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần bởi các điểm chia

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b.$$

Giả sử A_k là điểm trên đường cong có hoành độ x_k, tung độ $f(x_k)$ ($A_0 = A, A_n = B$).

Độ dài cạnh $A_k A_{k+1}$ là $\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$ do đó độ dài đường gấp khúc $A_0 A_1 ... A_n$ là $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$

Gọi T là độ dài cung AB, độ dài cung AB bằng giới hạn của dãy T_n.

$$T = \lim T_n$$

Theo định lí La-grăng, ta có $f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(c_k)(x_{k+1} - x_k)$, trong đó c_k là một điểm thuộc khoảng $(x_k ; x_{k+1})$.

Vậy $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}(x_{k+1} - x_k)$.

Đặt $H(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ Ta có $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} H(c_k)(x_{k+1} - x_k)$. Gọi U_n, L_n là các tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới cấp n của $H(x)$ đối với phân hoạch đoạn $[a ; b]$ thành n đoạn bằng nhau. Ta có

$$m_k \leq H(c_k) \leq M_k \text{ do đó } L_n \leq T_n \leq U_n.$$

Mặt khác $\lim U_n = \lim L_n = \int_a^b H(x)\,dx$ (xem phần bổ sung kiến thức của §4)

nên

$$T = \lim T_n = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Ví dụ. Tính độ dài đường cong $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$ từ điểm A có hoành độ $a = 0$ đến điểm B có hoành độ $b = 1$.

Giải

Ta có $f'(x) = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (f'(x))^2 = 8x$. Từ đó thay vào công thức ta được

$$T = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\,dx.$$

Đổi biến $u = 1 + 8x$ ta có du = 8dx. Khi $x = 0$ thì $u = 1$; khi $x = 1$ thì $u = 9$

$$T = \frac{1}{8}\int_1^9 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 = \frac{13}{6}.$$