§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh nắm vững định nghĩa và cách tìm các đường tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số.

Kĩ năng

Rèn luyện cho học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc tìm các đường tiệm cận của đồ thị.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Điều kiện cần để đồ thị của một hàm số có tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên là hàm số đó xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ a)$ hoặc trên khoảng $(b\ ;\ +\infty)$.

Tiệm cận ngang là một trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên. Nếu đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$) thì nó không có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$) và ngược lại.

2. Khi tìm tiệm cận đứng, ta thường xét các đường thẳng $x = x_0$, trong đó x_0 là điểm mà tại đó hàm số không xác định. Nếu tồn tại một khoảng I chứa điểm x_0 sao cho f xác định trên $I \setminus \{x_0\}$ thì phải xét hai giới hạn

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ và } \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

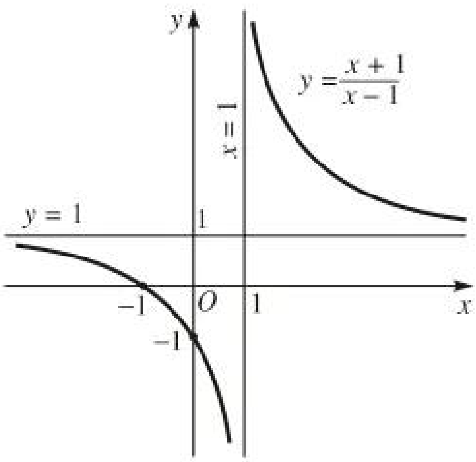
Nếu cả hai đều là giới hạn vô cực thì cả hai nhánh của đồ thị ở bên phải và bên trái của đường thẳng $x = x_0$ đều nhận nó làm tiệm cận đứng.

Ta xét các ví dụ đơn giản sau đây :

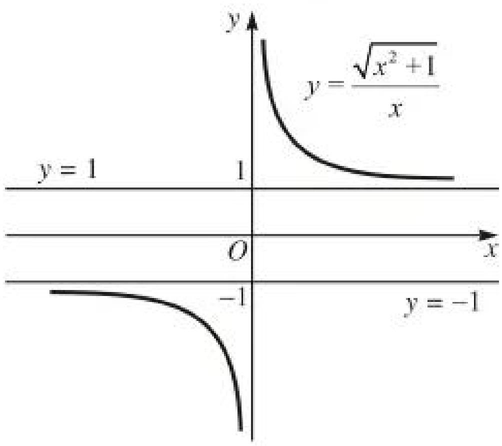
Ví dụ

Các hình 1.2, 1.3, 1.4, theo thứ tự, là đồ thị của các hàm số

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.



Hình 1.2



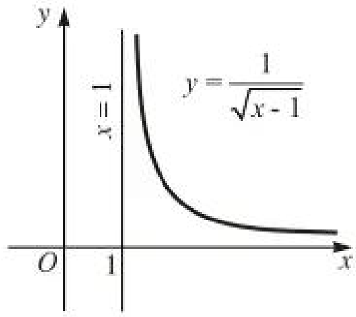
Hình 1.3

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ gồm hai nhánh nằm về hai bên của đường thẳng $x = 1$ (h.1.2). Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của cả hai nhánh vì $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$.

Tương tự, đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của cả hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (h.1.3) vì $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$.

3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có thể nhận đường thẳng $y = y_0$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$ hoặc khi đồng thời xảy ra cả hai trường hợp $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$, và nhận đường thẳng $y = -1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to -\infty$) vì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$ (h.1.3).



Hình 1.4

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ (h.1.4).

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ (h.1.2).

Ta cũng có những nhận xét tương tự đối với các đường tiệm cận xiên. Các nhận xét này không những giúp học sinh hiểu tốt hơn về các đường tiệm cận mà còn giúp các em phác hoạ được hình dạng của đồ thị một số hàm số.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết hoạt động $\boxed{\text{H1}}$.

Tiết 2. Phần còn lại (sau tiết 1) của bài.

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Để tận dụng thời gian giảng dạy trên lớp nên vẽ trước các hình trong bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Mục đích :* Giúp học sinh áp dụng định nghĩa để tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. $\boxed{\text{H1}}$ được giải tương tự như ví dụ 1.

Đồ thị của hàm số đã cho nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$ làm tiệm cận đứng, và nhận đường thẳng $y = 3$ làm tiệm cận ngang.

$\boxed{\text{H2}}$ *Mục đích :* Giúp học sinh áp dụng định nghĩa để tìm tiệm cận xiên của đồ thị.

Giải

Vì $y - (2x + 1) = \dfrac{1}{x - 2} \to 0$ khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$ nên đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

$\boxed{\text{H3}}$ Mục đích của hoạt động $\boxed{\text{H3}}$ là giúp học sinh áp dụng các công thức trong chú ý vừa nêu để viết phương trình tiệm cận xiên của đồ thị. $\boxed{\text{H3}}$ được giải tương tự như ví dụ 4.

Giải

Ta có

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x(x - 2)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} - 2x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x - 2} = 1.$$

Ta cũng có $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} (y - 2x) = 1$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

34. a) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{2}{3}$; tiệm cận ngang : $y = \frac{1}{3}$.

b) Tiệm cận đứng : $x = -3$; tiệm cận ngang : $y = -2$.

c) Tiệm cận đứng : $x = 3$; tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

d) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{1}{2}$.

Tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x(2x + 1)} = \frac{1}{2} \ ;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1} - \frac{x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-7x + 8}{2(2x + 1)} = -\frac{7}{4}.$$

Đường thẳng $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

e) Hai tiệm cận đứng : $x = 1$ và $x = -1$; tiệm cận ngang : $y = 0$.

f) Tiệm cận đứng : $x = -1$; tiệm cận ngang : $y = 0$.

35. a) Tiệm cận đứng : $x = 0$; tiệm cận xiên : $y = x - 3$.

b) Hai tiệm cận đứng : $x = 0$ và $x = 2$; tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

c) Hai tiệm cận đứng $x = -1$ và $x = 1$; tiệm cận xiên $y = x$.

d) Hai tiệm cận đứng : $x = -1$ và $x = \frac{3}{5}$; tiệm cận ngang : $y = -\frac{1}{5}$.

36. a) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty \ ; -1] \cup [1 \ ; +\infty)$.

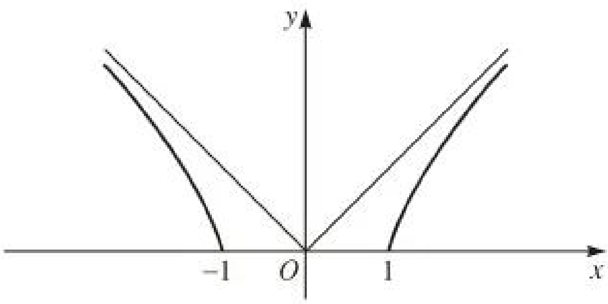
• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (h.1.5) (khi $x \to +\infty$).



Hình 1.5

• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to -\infty$)

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.5).

b) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty)$.

Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = 3\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - 3x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = 3x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$) (h.1.6).

• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to -\infty$)

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = = \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

$$= 2 + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$$

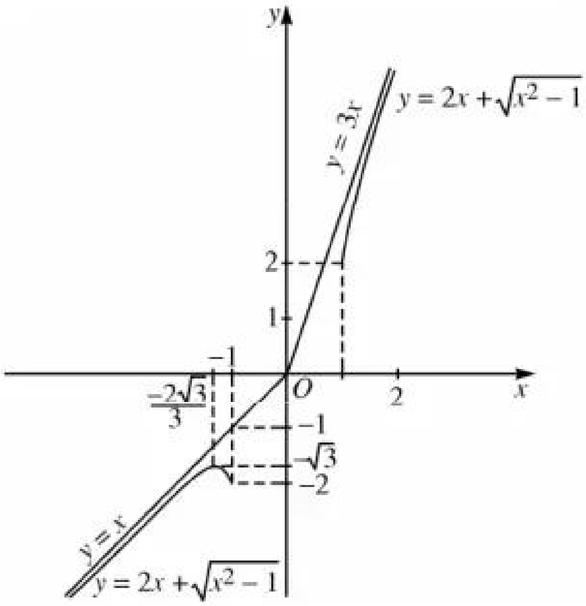
$$= 2 - 1 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.6).



Hình 1.6

Đồ thị của hàm số đã cho gồm hai nhánh. Nhánh phải của đồ thị nhận đường thẳng $y = 3x$ làm tiệm cận xiên, nhánh trái nhận đường thẳng $y = x$ làm tiệm cận xiên (h.1.6).

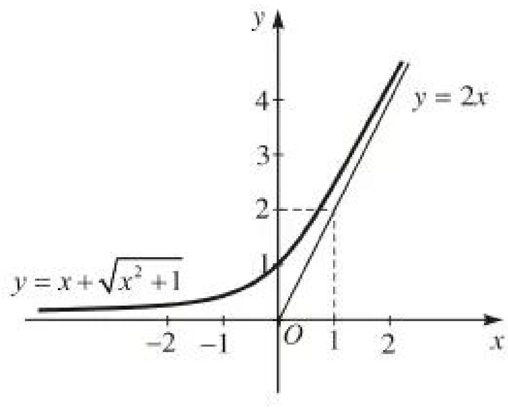
c) $$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - 2x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$



Hình 1.7

Đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.7).

d) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Đường thẳng $y = x + \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

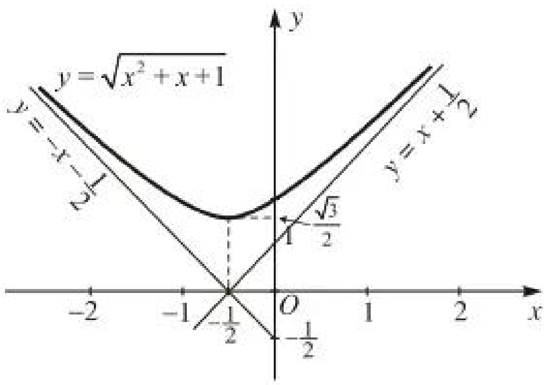
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y+x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}.$$



Hình 1.8

Đường thẳng $y = -x - \frac{1}{2}$ là một tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.8).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về tính duy nhất của tiệm cận xiên

Các công thức tính các hệ số a và b của tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$) trong chú ý của bài cho thấy đường tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$), nếu có, là duy nhất. Tuy nhiên, điều khẳng định này được suy ra ngay từ định nghĩa của tiệm cận.

Thật vậy, giả sử hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = cx + d$ đều là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \text{ và } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - cx - d] = 0.$$

Do đó

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - cx - d - (f(x) - ax - b)] = 0,$$

hay $$\lim_{x \to +\infty} [(a - c)x + (b - d)] = 0.$$

Từ đó suy ra $a - c = 0$ và $b - d = 0$, hay $a = c$ và $b = d$. Hiển nhiên, điều khẳng định này cũng đúng trong trường hợp $x \to -\infty$.