§5. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu, ghi nhớ được các tính chất và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

– Hiểu và nhớ các công thức tính đạo hàm của hai hàm số nói trên.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các công thức để tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

– Biết lập bảng biến thiên và vẽ được đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit với cơ số cho trước.

– Biết được cơ số của một hàm số mũ hoặc hàm số lôgarit là lớn hơn hay nhỏ hơn 1 khi biết sự biến thiên hoặc đồ thị của nó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Theo chương trình, hàm số mũ và hàm số lôgarit được đưa vào ngay sau chương ứng dụng của đạo hàm. Điều đó đã cho phép dùng đạo hàm trong việc khảo sát hai hàm số này. Bởi vậy, so với SGK 2000, nội dung của bài này có nhiều thay đổi đáng kể.

1. Về công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Trước khi học các công thức tính đạo hàm, học sinh cần nắm được hai vấn đề : (i) Tính liên tục của hàm số mũ, hàm số lôgarit, và (ii) các giới hạn :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \text{ và } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad \text{(a)}$$

– Về vấn đề (i) : Chương trình và thời lượng không cho phép chứng minh nên SGK đã thừa nhận tính liên tục của hai hàm số này. Giáo viên cần nhắc lại rằng điều thừa nhận ấy cũng có nghĩa là thừa nhận các giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \text{ với mọi } x_0 \in (-\infty\,;+\infty) \text{ và}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \text{ với mọi } x_0 \in (0\,;+\infty).$$

– Về vấn đề (ii) : Việc chứng minh các giới hạn (a) xuất phát từ định nghĩa số e đã được đưa ra trong bài học trước. Cụ thể là

$$e = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \qquad \text{(b1)}$$

(sự tồn tại của giới hạn này được thừa nhận do học sinh không được học định lí Weierstrass). Do đó SGK cũng thừa nhận giới hạn

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e} \qquad \text{(b2)}$$

để suy ra các giới hạn (a).

Tại sao lại phải đưa thêm giới hạn (b2) ? Bởi vì muốn chứng minh $\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, ta đã dùng phép đổi biến : đặt $x = \frac{1}{t}$. Bằng cách đó, từ (b1) ta chỉ suy ra được giới hạn bên phải $\lim_{x\to0^+}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, còn giới hạn bên trái $\lim_{x\to0^-}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ thì được suy ra từ (b2). Quá trình suy luận này tuy không quá khó nhưng không thích hợp với yêu cầu của chương trình. Đó là lí do tại sao SGK chỉ viết đơn giản : "Từ đó, bằng cách đổi biến (đặt $x = \frac{1}{t}$), ta được $\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$". Điều này là phù hợp với tư tưởng chủ đạo là không đi sâu vào vấn đề giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Việc phát biểu và chứng minh các giới hạn (a) chủ yếu nhằm giúp học sinh làm quen với cách tìm các giới hạn có liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit, từ đó dễ tiếp thu phép chứng minh các công thức tính đạo hàm. Vì vậy, đối với các lớp mà năng lực tiếp thu bài của học sinh còn yếu, giáo viên không cần thiết phải mất nhiều thời gian rèn luyện kĩ năng tìm các giới hạn như thế. Điều quan trọng là học sinh phải ghi nhớ và vận dụng tốt các công thức tính đạo hàm của hai hàm số này. Kĩ năng này còn rất cần cho chương tiếp theo, khi học sinh phải tính nguyên hàm và tích phân.

2. Về khảo sát hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Mục đích chủ yếu của bài học là làm cho học sinh nắm vững các tính chất và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit. Do đó các bước khảo sát hàm số mà học sinh đã học ở chương 1 chỉ được thực hiện khi khảo sát hàm số mũ trong trường hợp cơ số $a > 1$. Còn khi khảo sát hàm số lôgarit, các tính chất của hàm số được giới thiệu trước. Sau đó, học sinh tự kiểm chứng các tính chất ấy bằng đồ thị.

Khi khảo sát hai hàm số này, SGK đã thừa nhận một số giới hạn vô cực và giới hạn tại vô cực của hàm số, cụ thể là :

– Đối với hàm số mũ :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ (với } a > 1) \qquad (1a)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ (với } a > 1) \qquad (1b)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ (với } 0 < a < 1) \qquad (2a)$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ (với } 0 < a < 1) \qquad (2b)$$

– Đối với hàm số lôgarit :

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ (với } a > 1) \qquad (3a)$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty \text{ (với } a > 1) \qquad (3b)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ (với } 0 < a < 1) \qquad (4a)$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty \text{ (với } 0 < a < 1) \qquad (4b)$$

Thực ra, với kiến thức trong phạm vi SGK, chỉ cần thừa nhận các giới hạn (1a) và (3a) là có thể suy ra tất cả các giới hạn còn lại, (xem phần *Bổ sung kiến thức*). Tuy nhiên do khuôn khổ của chương trình, SGK không thể trình bày các chứng minh đó.

Tóm lại, trọng tâm của bài học này gồm hai vấn đề : một là các công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit, hai là các tính chất của hai hàm số này và sự thể hiện của các tính chất ấy qua đồ thị.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Giáo viên nên chuẩn bị trước các hình vẽ minh hoạ trên bảng phụ hoặc trên máy tính (nếu có điều kiện).

*** Dự kiến phân phối thời gian**

Dự kiến giáo viên giảng bài này trong 3 tiết, trong đó một nửa thời gian dành cho 3 tiểu mục đầu tiên, tức là đến hết các công thức đạo hàm của hai hàm số ; nửa thời gian còn lại dành cho việc khảo sát các tính chất và đồ thị của hai hàm số. Chú ý chữa bài tập xen kẽ các tiết học lí thuyết để kịp củng cố bài học.

*** Gợi ý về các hoạt động trên lớp**

H1 *Mục đích* : Giúp học sinh tái hiện kiến thức về hàm số liên tục.

Trả lời : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3$;

c) Do $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\log\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \log 1 = 0.$

H2 *Mục đích* : Củng cố công thức tính đạo hàm của hàm số mũ.

Trả lời : a) $y' = (2x+3)\,e^{2x}$.

b) $y' = \left(\cos x + \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}}$.

H3 *Mục đích :* Củng cố định lí 3 về đạo hàm của hàm số lôgarit và chuẩn bị đi đến hệ quả của định lí này.

Giải

Theo định lí 2b, ta có : $\left[\ln(-x)\right]' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

H4 *Mục đích :* Giúp học sinh tự khám phá và ghi nhớ các tính chất của hàm số mũ cơ số a trong trường hợp $0 < a < 1$ bằng cách so sánh với trường hợp $a > 1$.

Trả lời : a) Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ có tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$) là trục hoành.

b) Giáo viên tự làm.

H5 Giáo viên tự làm.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

47. a) Khi nhiệt độ của nước là $t = 100^{\circ}\mathrm{C}$ thì $P = 760$. Do đó ta có phương trình (ẩn a) $760 = a.10^{\frac{-2258,624}{373}}$.

Từ đó ta có $a \approx 863\ 188\ 841,4$.

b) $\approx 52,5$ mmHg.

48. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2 - e^{3x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2(1 - e^{3x})}{x} = -3e^2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - 1}{3x} = -3e^2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - e^{5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}\left(e^{-3x} - 1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-3e^{5x})\left(\dfrac{e^{-3x} - 1}{-3x}\right)$

$= (-3)\ .\ 1 = -3.$

Cách khác :

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x} - e^{5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^{5x} - 1}{x}\right) = 2 - 5 = -3.$$

49. a) $y' = (2x - 1)e^{2x}$.

b) $y' = 2x\sqrt{e^{4x} + 1} + \dfrac{2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} = \dfrac{2x\left[(x + 1)e^{4x} + 1\right]}{\sqrt{e^{4x} + 1}}$.

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

d) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

50. a) Đồng biến vì cơ số $\dfrac{\pi}{3} > 1$.

b) Nghịch biến vì cơ số $\dfrac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} < \dfrac{3}{1,4 + 1,7} < 1$.

51. Giáo viên tự vẽ và hướng dẫn học sinh vẽ bằng cách xác định toạ độ một số điểm.

52. Ta có bảng sau

STT	Loại âm thanh	$\frac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0 dB
2	Nhạc êm dịu	4000	36 dB
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6{,}8\times10^8$	88 dB
4	Tiếng máy bay phản lực	$2{,}3\times10^{12}$	124 dB
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130 dB

53. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3.\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x} = 3.$

b) Dễ thấy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ nên

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to0} x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0\,.\,1 = 0.$$

54. a) $y' = 3\ln^2 x + \dfrac{2(3x-2)\ln x}{x}.$

b) $y' = \dfrac{x\ln x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x}.$

c) $y' = \ln\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}.$

d) $y' = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$

55. a) Nghịch biến vì cơ số $\dfrac{2}{e} < 1.$

b) Đồng biến vì cơ số $a = \dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3} > 1.$

56. Giáo viên tự vẽ hình (chú ý liên hệ với đồ thị hàm số mũ cùng cơ số).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Như trên đã khẳng định, từ giới hạn (1a) và (3a) ta có thể chứng minh các giới hạn còn lại (xem trong mục *Những điều cần lưu ý*). Sau đây là một số chứng minh cụ thể.

Chứng minh từ (1a) suy ra (1b) :

Nếu đặt $t = -x$ thì $x \to -\infty$ khi và chỉ khi $t \to +\infty$, và $\lim\limits_{t \to +\infty} a^t = +\infty$ (theo 1a).

Do đó

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to +\infty} a^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{a^t} = 0.$$

Chứng minh (1a) suy ra (2a) :

Do $0 < a < 1$ nên $\frac{1}{a} > 1$. Từ đó, nếu đặt $t = -x$ thì $x \to -\infty$ khi và chỉ khi $t \to +\infty$,

và $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty$ (theo 1a). Do đó

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to +\infty} a^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty.$$

Chứng minh (1a) suy ra (2b), từ (3a) suy ra (3b), (4a) và (4b) hoàn toàn tương tự.

Chú ý

Sử dụng định nghĩa sau đây, chúng ta có thể chứng minh (1a) và (3a) :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$. Khi đó

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M > 0 : (\forall x > M,\ f(x) > N).$

Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ với $a > 1$ (1a) :

Xét hàm số $y = a^x$ $(a > 1)$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$. Với số $N > 0$ tuỳ ý cho trước, ta đặt $M = \log_a N$. Khi đó, với mọi $x > M$, ta có $x > \log_a N$. Từ đó, do $a > 1$ nên $a^x > N$. Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ (3a) :

Xét hàm số $y = \log_a x$ $(a > 1)$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$. Với số $N > 0$ tuỳ ý cho trước, ta đặt $M = a^N$. Khi đó, với mọi $x > M$, ta có $x > a^N$. Từ đó, do $a > 1$ nên $\log_a x > N$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.