§6. HÀM SỐ LUỸ THỪA (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu khái niệm hàm số luỹ thừa và ghi nhớ công thức tính đạo hàm của nó trong mỗi trường hợp.

– Nhớ hình dạng đồ thị của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các công thức để tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa và hàm số căn.

– Vẽ phác được đồ thị của một hàm số luỹ thừa đã cho. Từ đó nêu được tính chất của hàm số đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Cũng như các SGK trước đây, hàm số luỹ thừa được giới thiệu rất sơ lược ; chỉ khác là đưa sau bài hàm số mũ và hàm số lôgarit. Sở dĩ có sự khác biệt đó là do phép chứng minh công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa có sử dụng đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

2. Định nghĩa luỹ thừa đã dẫn đến sự khác nhau về tập xác định của hàm số luỹ thừa, tuỳ thuộc vào số mũ của nó được xét trên tập số nguyên dương, số nguyên âm hay tập số thực. Để tránh sự rắc rối ấy, khi khảo sát hàm số luỹ thừa một cách tổng quát, chúng ta chỉ xét chúng trên nửa khoảng $(0 ; +\infty)$.

Trong trường hợp số mũ nguyên, học sinh đã được học một vài hàm số tiêu biểu như $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$; khi số mũ chẵn thì chúng là những hàm số chẵn, khi số mũ lẻ thì chúng là những hàm số lẻ. Vì vậy, nếu đã biết đồ thị của những hàm số này trên khoảng $(0 ; +\infty)$ thì ta có thể suy ra đồ thị của chúng trên khoảng $(-\infty ; 0)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị đã có hoặc qua trục tung (đối với hàm số chẵn), hoặc qua gốc toạ độ (đối với hàm số lẻ).

3. Một trọng tâm của bài này là các công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa. Một cách đầy đủ, công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa phải được phát biểu như sau :

$y = x$	$y' = 1$ (với mọi x)
$y = x^n$ (n nguyên, $n > 1$)	$y' = nx^{n-1}$ (với mọi x)
$y = x^n$ (n nguyên, $n \leq 0$)	$y' = nx^{n-1}$ (với mọi $x \neq 0$)
$y = x^\alpha$ (α thực)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ (với mọi $x > 0$)

Hai trường hợp đầu học sinh đã được học ở lớp 11. Do đó để đơn giản, SGK chỉ nêu công thức đối với hàm số luỹ thừa ở dạng tổng quát nhất, tức là đối với hàm số $y = x^\alpha$ với α là số thực tuỳ ý. Tất nhiên công thức này vẫn đúng nếu α là số nguyên, mặc dù khi đó, hàm số không chỉ có đạo hàm tại những điểm $x > 0$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Giáo viên nên chuẩn bị trước các hình vẽ minh hoạ trên bảng phụ hoặc trên máy tính (nếu có điều kiện).

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Cho học sinh tự chứng minh công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa trong trường hợp số mũ âm (học sinh đã học công thức này với $n = 0$ và $n = 1$).

Giải

Khi $n = 0$ hay $n = 1$, ta đã biết công thức đúng với mọi $x \neq 0$. Khi $n < 0$, ta có $-n$ là số nguyên dương. Do đó :

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{\left(x^{-n}\right)'}{\left(x^{-n}\right)^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1} \text{ (với mọi } x \neq 0).$$

H2 *Mục đích :* Giúp học sinh ghi nhớ công thức tính đạo hàm của hàm căn.

Giải

$$\left(\sqrt[4]{e^{2x}+1}\right)' = \frac{(e^{2x}+1)'}{4\sqrt[4]{(e^{2x}+1)^3}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt[4]{(e^{2x}+1)^3}}.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

57. Giả sử (C_1) và (C_2) theo thứ tự là đồ thị của hàm số $y = x^{\alpha}$ và $y = x^{\beta}$ (α và β là -2 hoặc $-\frac{1}{2}$). Trên đồ thị, ta thấy trên khoảng $(1 ; +\infty)$, đường cong (C_2) nằm trên đường cong (C_1), nghĩa là khi $x > 1$ ta có bất đẳng thức $x^{\beta} > x^{\alpha}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $\beta > \alpha$. Vậy $\beta = -\frac{1}{2}$ và $\alpha = -2$.

Vậy đường (C_1) là đồ thị của hàm số $y = x^{-2}$, (C_2) là đồ thị hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

58. a) $y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}$.

b) $y' = \dfrac{(\ln^3 5x)'}{5\sqrt[5]{(\ln^3 5x)^4}} = \dfrac{3\ln^2 5x}{5x\sqrt[5]{\ln^{12} 5x}} = \dfrac{3}{5x\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

c) Để cho gọn, ta đặt $u = \dfrac{1+x^3}{1-x^3}$. Khi đó, $y' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ và $u' = \dfrac{6x^2}{(1-x^3)^2}$.

Do đó

$$y' = \frac{u'\sqrt[3]{u}}{3u} = \frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

d) $y' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]'\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]'$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\frac{a-b}{x}.$$