§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh biết các bước khảo sát các hàm đa thức thuộc hai dạng nêu trong bài và cách vẽ đồ thị của các hàm số đó.

Kĩ năng

Giúp học sinh thành thạo các kĩ năng

– Thực hiện các bước khảo sát hàm số.

– Vẽ nhanh và đúng đồ thị.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Về sơ đồ khảo sát hàm số, khác với sách chỉnh lí hợp nhất, trong Giải tích 12 nâng cao, việc tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số được thực hiện ngay từ đầu khi khảo sát sự biến thiên của hàm số. Nhờ đó, sau khi xét dấu đạo hàm, có thể lập ngay được bảng biến thiên của hàm số.

Học sinh dễ dàng đọc được một số tính chất của hàm số như tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, ... trên bảng biến thiên đó.

2. Về điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba và hàm số trùng phương

a) Điểm $U(x_0\,;f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U xuyên qua đồ thị.

b) Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng J chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì $(x_0\,;f(x_0)$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

c) Đồ thị của hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ luôn có một điểm uốn. Đó là điểm $U(x_0\,;f(x_0))$, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Điểm U là tâm đối xứng của đồ thị.

d) Đồ thị của hàm số trùng phương $f(x) = ax^4 + bx^2 + c,\ a \neq 0$ có hai điểm uốn hoặc không có điểm uốn tuỳ thuộc vào số nghiệm của phương trình

$$f''(x) = 0.$$

• Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_0,\ x_0 > 0$, thì đồ thị có hai điểm uốn $U_1(x_0; f(x_0))$ và $U_2(-x_0; f(x_0))$ đối xứng nhau qua trục tung.

• Nếu phương trình có một nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì đồ thị không có điểm uốn.

3. Sau khi cho học sinh giải các bài tập 40, 41, 42, nếu có điều kiện, GV có thể giới thiệu các dạng đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tuỳ theo dấu của a và số nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Để xét dấu y', ta giải phương trình $y' = 0$.

$$\Delta' = b^2 - 3ac.$$

1^o. $\Delta' > 0$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(x_1)$	↘	$y(x_2)$	↗	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9a).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$y(x_1)$	↗	$y(x_2)$	↘	$-\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9b).

2^o. $\Delta' = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm kép

$$x_0 = -\frac{b}{3a} \text{ và } y' = 3a(x - x_0)^2.$$

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(x_0)$	↗	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9c). Vì $y'(x_0) = 0$ nên tiếp tuyến tại điểm $(x_0 ; y_0)$ của đồ thị song song với trục hoành.

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

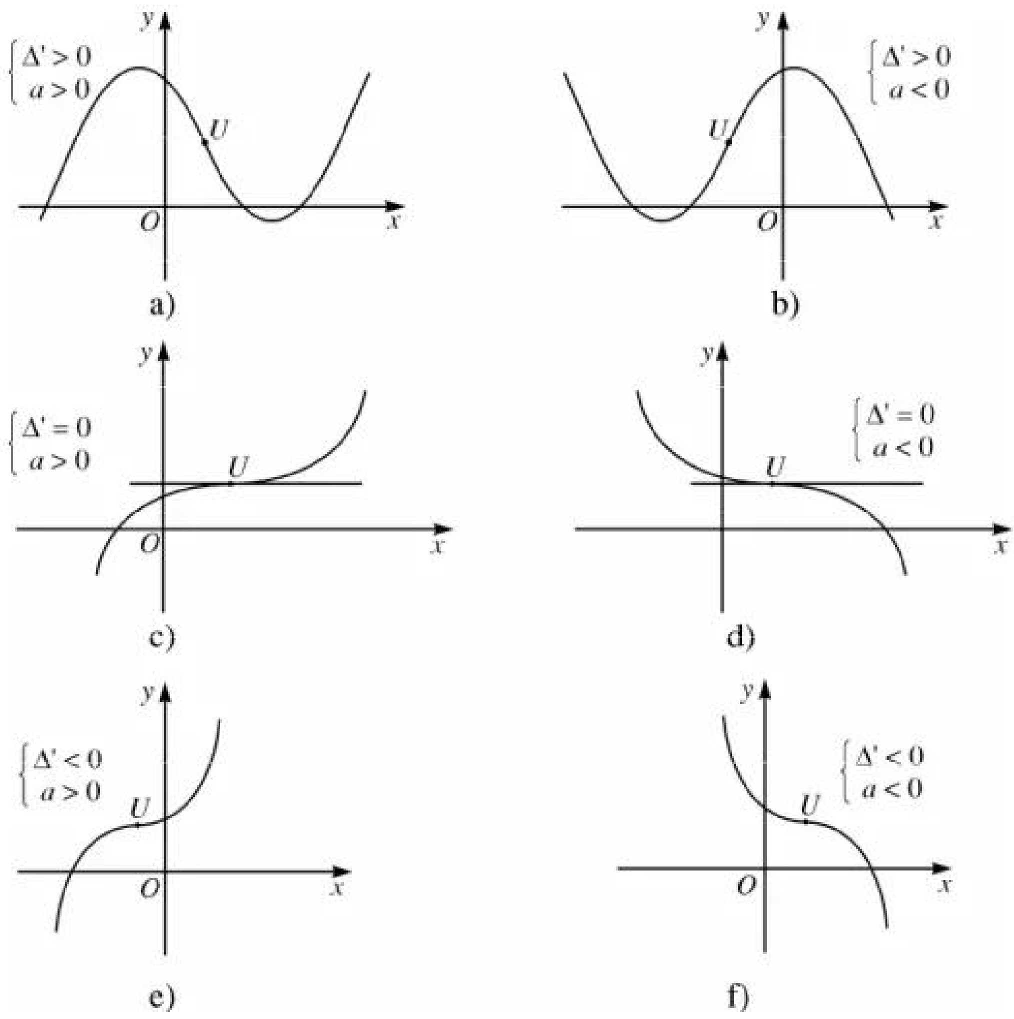
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$y(x_0)$	↘	$-\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9d).

3^{o}. $\Delta' < 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đồ thị có dạng của hình 1.9e).

• Nếu $a < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Đồ thị có dạng của hình 1.9f).



Hình 1.9

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 6ax + 2b$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Điểm $U(x_0 ; y(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị. Dễ dàng chứng minh được rằng điểm uốn U là tâm đối xứng của đồ thị.

4. Sau khi giải các bài tập 43, 44, nếu có điều kiện, GV có thể giới thiệu các dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

1^o. $ab < 0$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$y'' = 2(6ax^2 + b)$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm x_0$, với $x_0 = \sqrt{-\dfrac{b}{6a}}$. Đồ thị của hàm số có hai điểm uốn $(-x_0 ; y_0)$ và $(x_0 ; y_0)$, $y_0 = y(-x_0) = y(x_0)$. Đồ thị có dạng của hình 1.10a).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị có hai điểm uốn $(-x_0\,;\,y_0)$ và $(x_0\,;\,y_0)$ với $x_0 = \sqrt{-\dfrac{b}{6a}}$,

$y_0 = y(-x_0) = y(x_0)$. Đồ thị có dạng của hình 1.10b).

2^{o}. $ab > 0$ hoặc $b = 0$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$. Dễ dàng thấy rằng đồ thị không có điểm uốn.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

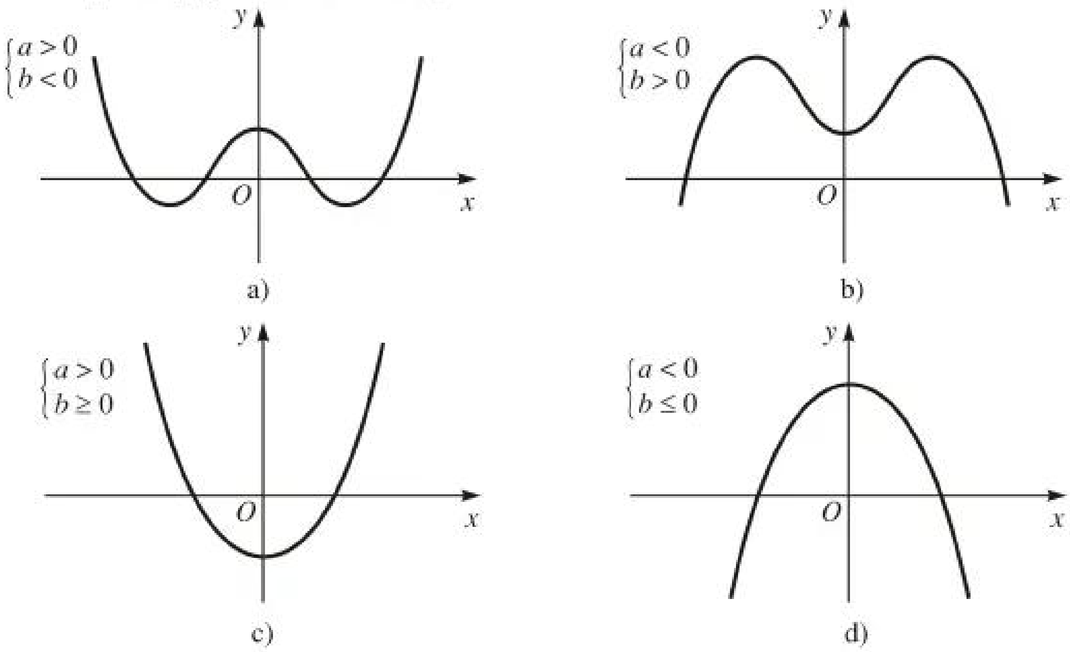
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.10c).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.10d).



Hình 1.10

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết, với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1. Hai ví dụ 1 và 2.

Tiết 2. Hai ví dụ 3 và 4.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

40. a) GV tự làm.

b) $U(-1\,;\,-2)$ là điểm uốn của đồ thị của hàm số đã cho.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn là $y = -3x - 5$.

c) GV tự làm.

41. a) GV tự làm.

b) • Nếu $m < -1$ hoặc $m > 3$ thì phương trình có 1 nghiệm.

• Nếu $m = -1$ hoặc $m = 3$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $-1 < m < 3$ thì phương trình có 3 nghiệm.

42. GV tự làm.

43. b) • Nếu $m < -2$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $m = -2$ thì phương trình có 3 nghiệm.

• Nếu $-2 < m < -1$ thì phương trình có 4 nghiệm.

• Nếu $m = -1$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $m > -1$ thì phương trình vô nghiệm.

c) Đồ thị có hai điểm uốn : $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\dfrac{13}{9}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\dfrac{13}{9}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn đó là

$$y = -\frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3} \text{ và } y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}.$$

44. GV tự làm.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

QUAN HỆ GIỮA DẤU ĐẠO HÀM CẤP HAI CỦA MỘT HÀM SỐ VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐÓ

Điều kiện để một điểm của đồ thị là điểm uốn của nó được giới thiệu trong hai định lí sau đây. Chú ý rằng khẳng định nêu trong " Điểm uốn của đồ thị " sau ví dụ 1 là hệ quả của định lí 2.

Định lí 1. *Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm* x_0 *và* $U(x_0\,; f(x_0))$ *là một điểm uốn của đường cong* $y = f(x)$ *thì* $f''(x_0) = 0$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $U(x_0\,; f(x_0))$ là một điểm uốn của đường cong $y = f(x)$ và $f''(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $f''(x_0) > 0$. Khi đó hàm số f có đạo hàm cấp một f' trên một khoảng $(a\,; b)$ chứa điểm x_0. Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),\ x \in (a\,; b).$$

($y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ là phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm U). Vì U là điểm uốn của đường cong nên với $h > 0$ đủ nhỏ, $(x_0 - h\,; x_0 + h) \subset (a\,; b)$ và $\varphi(x)$ có dấu khác nhau trên hai khoảng $(x_0 - h\,; x_0)$ và $(x_0\,; x_0 + h)$. Vì vậy $x = x_0$ không phải là một điểm cực trị của hàm số φ. Mặt khác, ta có $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Do đó $\varphi'(x_0) = 0$. Ngoài ra, $\varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0$. Theo định lí 3 trong §2, từ đó suy ra x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số φ. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy $f''(x_0) = 0$.

Định lí 2. *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một liên tục trên khoảng* $(a\,; b)$ *chứa điểm* x_0 *và có đạo hàm cấp hai trên các khoảng* $(a\,; x_0)$ *và* $(x_0\,; b)$. *Nếu* $f''(x)$ *đổi dấu khi x qua điểm* x_0 *thì* $U(x_0\,; f(x_0))$ *là một điểm uốn của đồ thị hàm số* $y = f(x)$.

Chứng minh. Giả sử $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,; x_0)$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,; b)$. Ta sẽ chỉ ra rằng trên khoảng $(a\,; x_0)$ đường cong $y = f(x)$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm U của đường cong và trên khoảng $(x_0\,; b)$ đường cong nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Thật vậy, phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm U là $y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Theo công thức Taylo, với mỗi $x \in (a\,;\,b) \setminus \{x_0\}$, tồn tại một điểm c giữa x_0 và x sao cho

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2.$$

Do đó

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2. \qquad (1)$$

+ Với mọi $x \in (a\,;\,x_0)$, ta có $x < c < x_0$, do đó $f''(c) < 0$ và từ (1) suy ra $f(x) - g(x) < 0$. Vậy trên khoảng $(a\,;\,x_0)$, đường cong $y = f(x)$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm U của đường cong.

+ Với mọi $x \in (x_0\,;\,b)$, ta có $x < c < b$; do đó $f''(c) > 0$ và từ (1) suy ra $f(x) - g(x) > 0$. Vậy trên khoảng $(x_0\,;\,b)$ đường cong nằm phía trên tiếp tuyến tại điểm U của đường cong.

Theo định nghĩa của điểm uốn, $U(x_0\,;\,f(x_0))$ là một điểm uốn của đường cong $y = f(x)$.

Trường hợp $f''(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 được chứng minh tương tự.