§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh biết :

– Cách xác định giao điểm của hai đường cong (đồ thị của hàm số).

– Khái niệm "hai đường cong tiếp xúc" và cách tìm tiếp điểm của chúng.

Kĩ năng

Giúp học sinh thành thạo các kĩ năng :

– Đưa việc xác định toạ độ giao điểm của hai đường cong về việc giải phương trình và ngược lại.

– Chứng minh hoặc tìm điều kiện để hai đường cong cho trước tiếp xúc với nhau, xác định toạ độ của tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của hai đường cong đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Trong ví dụ 3, ta đã nêu một điều kiện để đường thẳng là tiếp tuyến của parabol. Có thể cho học sinh sử dụng kết quả này khi giải bài tập.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1 : Từ đầu đến ví dụ 2.

Tiết 2 : Phần còn lại của bài, từ hoạt động **H2**.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Hoạt động này nhằm giúp học sinh đưa việc tìm số giao điểm của hai đường cong về việc tìm số nghiệm của một phương trình.

Giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình

$$\frac{-x^2+2x}{x-1} = x - m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x = (x-m)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - (m+3)x + m = 0. \qquad (2)$$

((1) và (2) tương đương vì $x = 1$ không phải là nghiệm của (2)).

Vì $\Delta = (m+3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 > 0$ với mọi m, nên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy với mọi giá trị của m đường thẳng cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt.

H2 Hoạt động này nhằm giúp học sinh chứng minh được sự tiếp xúc của hai đường cong cho trước, tìm tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của chúng. Giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - x = x^2 - 1 \\ (x^3 - x)' = (x^2 - 1)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = x^2 - 1 \\ 3x^2 - 1 = 2x. \end{cases}$$

Hệ có một nghiệm $x = 1$. Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(1 ; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm M là :

$$y = y'(1)(x - 1) \text{ hay } y = 2(x - 1).$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

57. a) GV tự làm.

b) Hoành độ giao điểm của hai đường cong $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ là nghiệm của phương trình

$$2x^3 + 3x^2 + 1 = 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

Hai giao điểm : $A(0 ; 1)$ và $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

c) $f'(x) = 6x^2 + 6x$; $g'(x) = 4x$.

$f'(0) = 0$; $g'(0) = 0$. Đường thẳng $y = 1$ là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ tại điểm A.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm B là

$$y = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{ hay } y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$. Phương trình tiếp tuyến của parabol $(\mathscr{P})$ tại điểm B là

$$y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{ hay } y = -2x + \frac{1}{2}.$$

d) $f(x) - g(x) = 2x^3 + x^2 = x^2(2x+1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Trên khoảng $\left(-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới $(\mathscr{P})$.

Trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ và $(0\,;+\infty)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía trên $(\mathscr{P})$.

58. a) GV tự làm.

b) Phương trình của đường thẳng d_m là

$$y = m(x+2) + 2 \text{ hay } y = mx + 2m + 2.$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d_m và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình

$$mx + 2m + 2 = \frac{2x-1}{x+1}$$

$\Leftrightarrow \quad (mx + 2m + 2)(x+1) = 2x - 1$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0. \qquad (1)$

• Đường thẳng d_m cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 12.$$

• Hai nhánh của đường cong đã cho nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x = -1$ của đồ thị. Đường thẳng d_m cắt đường cong đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < -1 < x_2$.

Đặt $x = t - 1$; phương trình (1) trở thành

$m(t-1)^2 + 3m(t-1) + 2m + 3 = 0,$

hay $mt^2 + mt + 3 = 0.$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm và -1 nằm trong khoảng hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu, tức là $m < 0$.

59. Dễ dàng thấy rằng điểm $A(-1 ; 2)$ là điểm chung của ba đường cong đã cho. Ngoài ra, ta có

$f'(x) = -2x + 3 \;;\; g'(x) = 3x^2 - 2x \;;\; h'(x) = 2x + 7.$

$f'(-1) = g'(-1) = h'(-1) = 5.$

Ba đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm A.

60. Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} \\ \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x\right)' = \left(\dfrac{3x}{x+2}\right)' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} & (1) \\ x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{(x+2)^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{3}{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -5.$$

$x = -5$ không thoả mãn (2).

Hệ phương trình (I) có một nghiệm duy nhất $x = 0$. Vậy hai đường cong tiếp xúc với nhau tại gốc toạ độ O ; $y'(0) = \dfrac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm gốc là $y = \dfrac{3}{2}x$.

61. Hoành độ tiếp điểm của hai parabol là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha = -\dfrac{g}{2v_0^2}x^2 + \dfrac{v_0^2}{2g} \\ -\dfrac{g}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x + \tan\alpha = -\dfrac{g}{v_0^2}x. \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình thứ hai của hệ là $x = \dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$.

Dễ thấy đó cũng là nghiệm của phương trình thứ nhất của hệ. Vậy với mọi $\alpha \in \left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hai parabol luôn tiếp xúc với nhau. Hoành độ tiếp điểm là $x = \dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$. Tung độ của tiếp điểm là

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{g\tan\alpha}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{\tan^2\alpha}\right).$$

Điểm $\left(\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}\,;\dfrac{v_0^2}{2g}(1-\cot^2\alpha)\right)$ là tiếp điểm của hai parabol với mọi $\alpha \in \left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$.