E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (3 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

Thời gian dành cho ôn tập chương là 2 tiết, trong đó có 1 tiết kiểm tra. Như vậy toàn bộ lí thuyết và bài tập của chương được ôn trong 1 tiết. Giáo viên nên cho các câu hỏi và bài tập ít nhất là trước một tuần để học sinh có thời gian chuẩn bị. Trên lớp giáo viên cho học sinh chữa một số bài tập trong các bài tập đã cho. Sau đây là một số câu hỏi lí thuyết có tính chất gợi ý.

1. Định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng, trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

2. Nêu điều kiện cần để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng.

3. Nêu điều kiện đủ để hàm số đồng biến, nghịch biến hoặc lấy giá trị không đổi trên một khoảng, một đoạn, trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$.

4. Định nghĩa điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số.

5. Nêu điều kiện cần để hàm số đạt cực trị.

6. Nêu hai điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị :

a) Sử dụng đạo hàm cấp một (từ đó có quy tắc 1).

b) Sử dụng đạo hàm cấp hai (từ đó có quy tắc 2).

7. Định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

8. a) Định nghĩa các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) Viết các công thức tính các hệ số a, b của tiệm cận xiên $y = ax + b$.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính đơn điệu của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. *Giả sử K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Hàm số f xác định trên K gọi là*

• Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

• Nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**** Điều kiện cần để hàm số đơn điệu***

Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó :

a) Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

**** Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu***

1^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên I.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên I.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I.

2^o. Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a ; b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$.

b) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$.

3^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

2. Cực trị của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp số thực $\mathcal{D}$ và $x_0 \in \mathcal{D}$.

x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a\ ;\ b)$ sao cho $x_0 \in (a\ ;\ b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\ ;\ b) \setminus \{ x_0 \}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f và điểm $(x_0\ ;\ f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Điểm cực tiểu của hàm số và của đồ thị hàm số được định nghĩa tương tự.

**** Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị***

Nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Hàm số f có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm.

**** Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị***

1^o. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a\ ;\ x_0)$ và $(x_0\ ;\ b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 theo chiều tăng thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 theo chiều tăng thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

2^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó :

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \le f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên $\mathcal{D}$, kí hiệu là $M = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số được định nghĩa tương tự.

4. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

• Đường thẳng $y = ax + b$, $a \ne 0$, gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

• Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

5. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\qquad y = ax^4 + bx^2 + c$;

$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; $\qquad y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

Xem §6, §7 trong Giải tích 12 nâng cao.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

68. a) Hàm số $f(x) = \tan x - x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Từ đó

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right), \text{ tức là}$$

$$\tan x - x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Hàm số $f(x) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0$ với mọi $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (suy ra từ a)).

Do đó, hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có

$$f(x) > f(0) = 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

69. GV tự làm.

70. Thể tích hình trụ là

$$V = \pi r^2 h,$$

r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2},$$

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Ta tìm $r > 0$ sao cho tại đó S đạt giá trị nhỏ nhất.

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \text{ ; } S' = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Bảng biến thiên

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Khi đó

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

71. Gọi x, y là độ dài hai cạnh còn lại của tam giác.

Ta có

$$x + y = 16 - 6 = 10,\ x > 0, y > 0.$$

Diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{p(p-6)(p-x)(p-y)}$$

$$= \sqrt{8.2(8-x)(8-y)}$$

$$= 4\sqrt{(8-x)(8-y)}.$$

Thay $y = 10 - x$, ta được

$$S = 4\sqrt{(8-x)(x-2)},$$

$$S = 4\sqrt{-x^2 + 10x - 16} \text{ với } 0 < x < 10.$$

S đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0\ ;\ 10)$ khi và chỉ khi hàm số

$$f(x) = -x^2 + 10x - 16$$

đạt giá trị lớn nhất trên khoảng này.

$$f'(x) = -2x + 10\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0		5		10
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất khi $x = 5$ (cm) và $y = 5$ (cm) ;

$$\max_{x\in(0;10)} f(x) = f(5) = 9.$$

Khi đó diện tích tam giác là

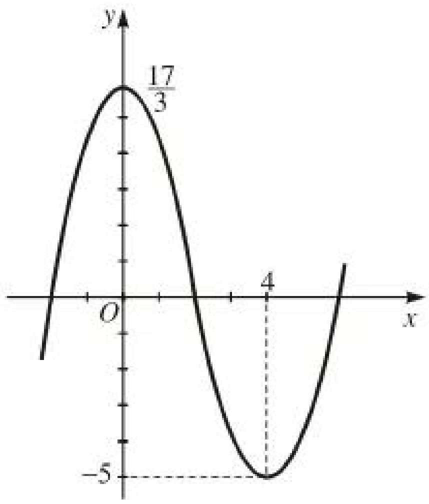
$$S = 4\sqrt{9} = 12\ (\text{cm}^2).$$

72. a) Hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x^2 - 4x\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị



b) Ta có $f(-2) = -\frac{8}{3} - 8 + \frac{17}{3} < 0$ và $f(0) = \frac{17}{3} > 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[-2 ; 0]$. Vì $f(-2)f(0) < 0$ nên, theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\alpha \in (-2 ; 0)$ sao cho $f(\alpha) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Vì hàm số f đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất α thuộc khoảng này.

Tương tự, hàm số f liên tục trên đoạn $[0 ; 4]$.

Vì $f(0) = \frac{17}{3} > 0$ và $f(4) = -5 < 0$ nên tồn tại một số thực $\beta \in (0 ; 4)$ sao cho $f(\beta) = 0$. Vì hàm số f nghịch biến trên khoảng $(0 ; 4)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất β thuộc khoảng này.

Cũng như vậy, phương trình có nghiệm duy nhất γ thuộc khoảng $(4 ; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý. Có thể thấy ngay điều khẳng định này trên đồ thị của hàm số. Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{3}$ cắt trục hoành tại ba điểm.

73. a) $f'(x) = 3x^2 + p$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + p = 0$. (1)

Hàm số f có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là $p < 0$. Khi đó, hai nghiệm của phương trình (1) là

$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ và } x = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

với $M = \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}},$

$m = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}.$

b) Nếu $Mm < 0$ thì $M > 0$ và $m < 0$. Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm α, β, γ với $\alpha < -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $-\sqrt{-\frac{p}{3}} < \beta < \sqrt{-\frac{p}{3}}$ và $\gamma > \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

c) Nếu $Mm > 0$ thì hai số M và m cùng dấu.

- Nếu $M < 0$ và $m < 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất (lớn hơn $\sqrt{-\frac{p}{3}}$).
- Nếu $M > 0$ và $m > 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất (nhỏ hơn $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$).

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} p < 0 \\ Mm = q^2 - \frac{4}{9}p^2\left(-\frac{p}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

74. a) GV tự làm.

b) $U(0\ ;\ 1)$ là điểm uốn của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho.

Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại U là

$$y = -3x + 1.$$

c) Phương trình của đường thẳng d_m là $y = mx + 1$. Hoành độ giao điểm của đường thẳng d_m và đường cong $(\mathscr{C})$ là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 1 = mx + 1$$

$$x^3 - (m + 3)x = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 3. \end{array}\right.$$

Đường thẳng d_m cắt đường cong $(\mathscr{C})$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, tức là

$$m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

75. a) GV tự làm.

b) Hoành độ giao điểm của đường cong đã cho và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

Vậy phải có $m > 0$ và $m \neq 1$. Khi đó, phương trình (2) có 4 nghiệm

$$x = -1, x = 1,\ x = -\sqrt{m},\ x = \sqrt{m}.$$

Đường cong đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau khi và chỉ khi

$$\sqrt{m} = 3 \quad \text{hoặc} \quad \sqrt{m} = \frac{1}{3},$$

tức là $m = 9$ hoặc $m = \dfrac{1}{9}$.

76. GV tự làm.

77. a) GV tự làm.

b) Gọi $M(x_0\ ;\ y_0)$ là một điểm bất kì của mặt phẳng toạ độ. Đường cong $(\mathcal{H}_m)$ đi qua điểm M khi và chỉ khi m là nghiệm của phương trình

$$\frac{x_0 - 4m}{2(mx_0 - 1)} = y_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 - 1 \neq 0 \\ 2y_0(mx_0 - 1) = x_0 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 \neq 1 & (3) \\ (2x_0y_0 + 4)m - x_0 - 2y_0 = 0. & (4) \end{cases}$$

Mọi đường cong $(\mathcal{H}_m)$ với $m \neq \pm\frac{1}{2}$ đều đi qua điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm\frac{1}{2}$.

Phương trình (4) nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_0y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình trên có hai nghiệm

$$(x_0\,;y_0) = (-2\ ;\ 1) \text{ và } (x_0\,;y_0) = (2\ ;\ -1).$$

Ta kiểm tra điều kiện (3).

- Với $x_0 = -2$, ta có $m \neq -\frac{1}{2}$.
- Với $x_0 = 2$, ta có $m \neq \frac{1}{2}$.

Vậy mọi đường cong $(\mathcal{H}_m)$ với $m \neq \pm\frac{1}{2}$ đều đi qua hai điểm cố định $A(-2\ ;\ 1)$ và $B(2\ ;\ -1)$.

78. a) GV tự làm

b) Hoành độ giao điểm của parabol $(\mathcal{P})$ và hypebol $(\mathcal{H})$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - x + 1)(x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Giao điểm của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{H})$ là điểm $A(0 ; 1)$. Dễ dàng thấy rằng $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{H})$ tiếp xúc với nhau tại điểm A.

c) Đặt $f(x) = x^2 - x + 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

$$f(x) - g(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}.$$

Ta lập bảng xét dấu của $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; +\infty)$, parabol $(\mathscr{P})$ nằm phía trên hypebol $(\mathscr{H})$.

Trên khoảng $(-1 ; 0)$, parabol $(\mathscr{P})$ nằm phía dưới hypebol $(\mathscr{H})$.

79. a) GV tự làm.

b) Dễ thấy đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đường cong $(\mathscr{C})$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathscr{C})$ tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ là

$$y = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình trên, ta được tung độ của điểm A :

$$y_A = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(-x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0}.$$

Hoành độ của điểm B là nghiệm của phương trình

$$\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0)+x_0+\frac{1}{x_0}=x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}=0 \Leftrightarrow x=2x_0.$$

$$x_B=2x_0.$$

Ta có

$$x_M=x_0=\frac{0+2x_0}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}.$$

Vì ba điểm A, M, B thẳng hàng nên từ đó suy ra rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Diện tích tam giác OAB là

$$S=\frac{1}{2}|y_A||x_B|=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0}\right||2x_0|=2 \text{ với mọi } x_0\neq 0.$$

80. (B) ; **81.** (C) ; **82.** (D) ; **83.**(D) ; **84.** (A) ; **85.**(C) ; **86.**(B) ; **87**(A) ; **88.**(C) ; **89.** (D) ; **90.**(B) ; **91.** (C) ; **92.**(A) ; **93.** (D) ; **94.**(B) ; **95.** (C) ; **96.** (B) ; **97.** (D) ; **98.** (A) ; **99.** (C) ; **100.** (D).

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu hỏi dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời (chẳng hạn, nếu chọn phương án C cho câu 2 thì đánh dấu × vào ô trống nằm ở dòng "Câu 2" và cột "C"). Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-x^4+\frac{x^3}{3}-1$

(A) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$;

(C) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(D) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 11$

(A) Đạt cực đại tại điểm $x = 1$;

(B) Đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$;

(C) Đạt cực đại tại điểm $x = 0$;

(D) Đạt cực tiểu tại điểm $x = -4$.

Câu 3. Parabol $y = x^2 + x$ tiếp xúc với

(A) Parabol $y = 2x^2 + 1$;

(B) Đường thẳng $y = 2x - 1$;

(C) Đường cong $y = x^3$;

(D) Đường cong $y = x^3 + 1$.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 (5 điểm).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2.$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = m(x-2) - 4$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong $(\mathscr{C})$.

Câu 5 (*2 điểm*).

Tìm các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Đáp án

Câu 1. (C)

Câu 2. (B)

Câu 3. (D)

Câu 4. a) 1^o. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

2^o. Sự biến thiên của hàm số :

- Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

- Bảng biến thiên

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -4$.

• Điểm uốn

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 6x - 6$.

Vì $y'' = 0$ tại điểm $x = 1$ và y'' đổi dấu khi x qua điểm $x = 1$ nên $U(1\,;-2)$ là điểm uốn của đồ thị.

3^o. Đồ thị : GV tự vẽ.

b) Với mọi giá trị của m, đường thẳng đã cho luôn đi qua điểm cố định $A(2\,;-4)$.

Vì toạ độ của điểm A thoả mãn phương trình $y = x^3 - 3x^2$ nên A thuộc $(\mathscr{C})$.

Câu 5. Ta có

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1\,;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x + 1}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$).

Vì

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1\,;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x + 1}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2},$$

nên đường thẳng $y = -x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

ĐỀ SỐ 2

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu hỏi dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời (Chẳng hạn, nếu chọn phương án C cho câu 2 thì đánh dấu × vào ô trống nằm ở dòng "Câu 2" và cột "C"). Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Hàm số $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$

(A) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$

(A) Đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$;

(B) Đạt cực đại tại điểm $x = 2$;

(C) Đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$;

(D) Không có cực đại, cực tiểu.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$ nhận

(A) Đường thẳng $y = x$ làm tiệm cận xiên ;

(B) Đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang ;

(C) Đường thẳng $y = x + 1$ làm tiệm cận xiên ;

(D) Đường thẳng $y = x - 1$ làm tiệm cận xiên.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 (*5 điểm*).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = x + \frac{4}{x}.$$

b) Tìm m sao cho đường thẳng $y = m(x-2)+4$ cắt đường cong $(\mathscr{C})$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó.

Câu 5 (2 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = -2\sin^2 x + 2\sin x - 1.$$

Đáp án

Câu 1. (A)

Câu 2. (C)

Câu 3. (D)

Câu 4. a) 1^{o}. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2^{o}. Sự biến thiên của hàm số

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to0^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số đã cho (khi $x \to 0^-$ và $x \to 0^+$).

Vì

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0 \text{ và } \lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$$

nên đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

• Bảng biến thiên

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \pm 2$.

x		-2		0		2		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2 ; 0)$ và $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = -4$.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = 4$.

3^o. Đồ thị : GV tự vẽ.

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng đã cho và đường cong $(\mathscr{C})$ là nghiệm của phương trình

$$m(x-2)+4 = x + \frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad mx(x-2)+4x = x^2+4$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-2)x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Hai nhánh của $(\mathscr{C})$ nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x = 0$. Đường thẳng đã cho cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, tức là

$$m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Câu 5.

Đặt $t = \sin x \ (-1 \le t \le 1)$, ta được

$$y = f(t) = -2t^2 + 2t - 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[-1 ; 1]$. Ta có

$f'(t) = -4t + 2$;

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $f(-1) = -5$; $f(1) = -1$.

So sánh các giá trị đó, ta được

$$\max_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \text{ và } \min_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(-1) = -5.$$

Do đó

$$\max_{x\in\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2} \text{ và } \min_{x\in\mathbb{R}} y = -5..$$

$\left(y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}\right.$; $y = -5 \Leftrightarrow \sin x = -1$; $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$; $\left.\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1\right)$.