E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

• Với hai tiết, giáo viên dành tiết đầu để ôn tập kiến thức trong chương và dành tiết thứ hai để trả lời câu hỏi và chữa bài tập ôn tập chương III.

• Để chuẩn bị tốt cho giờ ôn tập, giáo viên nên hướng dẫn học sinh soạn một đề cương ôn tập, trong đó nêu các kiến thức cần nhớ đồng thời giao cho học sinh làm một số bài tập ở phần : Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III.

• Trong giờ ôn tập giáo viên thu đề cương ôn tập của học sinh, dành 15 phút nêu câu hỏi kiểm tra kiến thức lí thuyết. Phần thời gian còn lại (30 phút) để chữa bài tập.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nguyên hàm

• Cho hàm số f liên tục trên khoảng K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

• Nếu hàm số f có một nguyên hàm thì nó cũng có vô số nguyên hàm. Tuy nhiên các nguyên hàm của hàm số f chỉ sai khác nhau một hằng số.

• Để tìm tất cả các nguyên hàm của f ta chỉ cần tìm một nguyên hàm F của f.

• Mỗi nguyên hàm của f đều được kí hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$. Vậy

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

• Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ còn được dùng để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của f. Do đó, nếu F là một nguyên hàm nào đó của f thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

• $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

• $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, với mỗi số thực $k \neq 0$.

• Công thức nguyên hàm từng phần

$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

• Công thức đổi biến : Nếu $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ thì

$$\int f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f[u(x)]\mathrm{d}u(x) = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F[u(x)] + C.$$

2. Tích phân và ứng dụng

• Tích phân của hàm f (liên tục trên K chứa a, b) từ a đến b kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ và được tính bởi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f.

• Công thức đổi biến số $\int_a^b f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$

• Công thức tích phân từng phần $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

$$S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$ và $y = d$ $(c < d)$ là

$$S = \int_c^d \left|g(y) - h(y)\right|\,\mathrm{d}y.$$

• Giả sử $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x. Khi đó thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm a và b là

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ không âm trên đoạn $[a ; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay hình đó quanh trục hoành ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

• Cho đường cong $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c ; d]$. Xét hình giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, đường thẳng $y = c$, $y = d$ và $x = 0$. Quay hình đó xung quanh trục tung ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy.$$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

41. a) $x^2 + \dfrac{2}{x} + C$;

b) $4x^2 - \dfrac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$;

c) Đổi biến $u = x^{\frac{3}{2}} + 1$ dẫn tới

$$\frac{2}{3}\int \sin u\,du = -\frac{2}{3}\cos u + C = -\frac{2}{3}\cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C.$$

d) Đổi biến $u = \cos(2x + 1)$ dẫn tới $-\displaystyle\int \frac{du}{2u^2} = \frac{1}{2u} + C = \frac{1}{2\cos(2x + 1)} + C.$

42. a) Đổi biến $u = \dfrac{1}{x} - 1$ dẫn tới $-\displaystyle\int \cos u\,du = -\sin u + C = -\sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + C.$

b) Đổi biến $u = x^4 + 1$ dẫn tới $\displaystyle\int \frac{u^3\,du}{4} = \frac{u^4}{16} + C = \frac{(x^4 + 1)^4}{16} + C.$

c) Lấy nguyên hàm từng phần với $u = \dfrac{x}{3}$, $v' = e^{2x} \Rightarrow u' = \dfrac{1}{3}$, $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$ dẫn tới

$$\int \frac{x.e^{2x}}{3}dx = \frac{x.e^{2x}}{6} - \int \frac{e^{2x}}{6}dx = \frac{x.e^{2x}}{6} - \frac{e^{2x}}{12} + C.$$

d) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$. *Gợi ý :*

Lấy nguyên hàm từng phần với $u = x^2$, $v' = e^x \Rightarrow u' = 2x$, $v = e^x$ dẫn tới $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$. Tính $\int xe^x\,dx$ bằng nguyên hàm từng phần với $u = x, v' = e^x$ ta được $\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x\,dx = x.e^x - e^x + C$.

43. a) $-e^{-x}(x+1) + C$.

Gợi ý :

Lấy nguyên hàm từng phần với $u = x$, $v' = e^{-x}$.

b) Đổi biến $u = \ln x$ dẫn tới $\int u\,du = \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C$.

44. Đổi biến $u = 3x^2 - 1$ dẫn tới $f(x) = \int 2u^3\,du = \dfrac{u^4}{2} + C = \dfrac{(3x^2-1)^4}{2} + C$.

Vì $3 = f(1) = 8 + C$ nên $C = -5$. Vậy $f(x) = \dfrac{(3x^2-1)^4}{2} - 5$.

45. Xét hàm số $I(x) = \int\limits_0^x (t - t^2)\,dt$. $(x > 0)$

Ta có $I'(x) = x - x^2$

Bằng cách lập bảng biến thiên của $I(x)$ trên $(0\,;+\infty)$ ta dễ thấy $I(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$.

46. a) $(-2).(-1) = 2$; b) $5 + 4 = 9$;

c) $2.5 - 3.4 = -2$; d) $-1 - 5 = -6$.

47. Giả sử m và M tương ứng là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số f trên $[a\,;b]$. Ta có $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a\,;b]$.

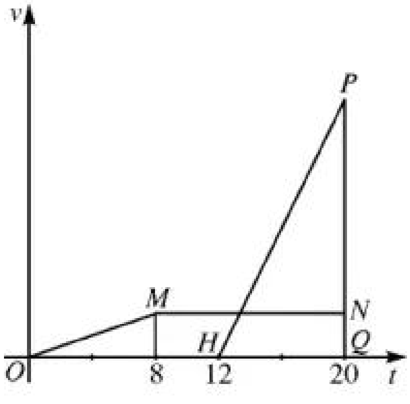
Do đó theo bài tập 13 :

$$\int\limits_a^b m\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Vì f là hàm liên tục nên tồn tại $c \in [a\,;b]$ để $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

48. Vật dừng lại tại thời điểm $t = 5$. Quãng đường vật đi được là $\int_0^5 t(5-t)\,\mathrm{d}t = \frac{125}{6}$ m.

49. Thời điểm A và B gặp nhau là 20 giây kể từ lúc A xuất phát. Đồ thị vận tốc của A là đường gấp khúc OMN (h.3.13). Quãng đường A đã đi được là diện tích hình thang $OMNQ$. Diện tích của nó là $(20+12)\frac{6}{2} = 96$ do đó lúc gặp B, A đi được 96m. Đồ thị vận tốc của B là đường thẳng HP. Vì B xuất phát cùng vị trí với A nên quãng đường B đã đi được là 96m. Mặt khác, quãng đường B đã đi được bằng diện tích hình tam giác HPQ với $HQ = 8$ và PQ chính là vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A. Suy ra $96 = \frac{8PQ}{2} = 4PQ$ nên $PQ = 24$. Vậy vận tốc của B tại thời điểm nó đuổi kịp A là 24m/s.



Hình 3.13

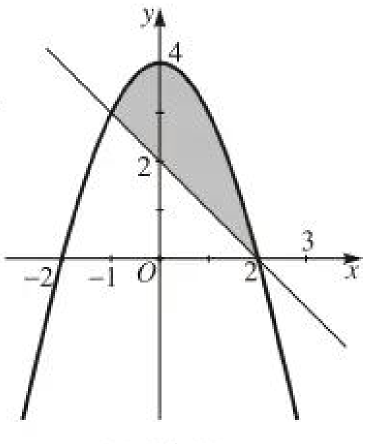
50. a) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$. *Hướng dẫn :* Tích phân từng phần với $u = x^2$, $v'(x) = \sin 2x$ suy ra $u' = 2x$, $v = -\frac{\cos 2x}{2}$.

b) Đổi biến $u = 2x^2 + 1$ ta có $I = \int_3^9 \frac{u\,\mathrm{d}u}{4} = 9$.

c) Đổi biến $u = x^2 - 2x$ ta có $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{2} = \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{2}$.

51. a) (h.3.14)

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$



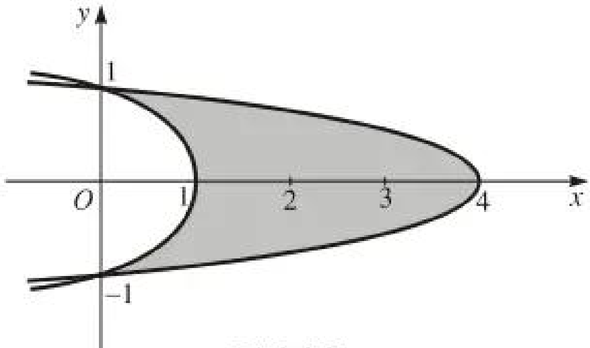
Hình 3.14

b) (h.3.15)

Ta có diện tích phần nằm trong góc phần tư thứ nhất là

$$\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{4}} dx = \frac{8}{3} - \frac{4}{5} = \frac{28}{15}.$$

Suy ra diện tích cần tìm là $2.\frac{28}{15} = \frac{56}{15}$.



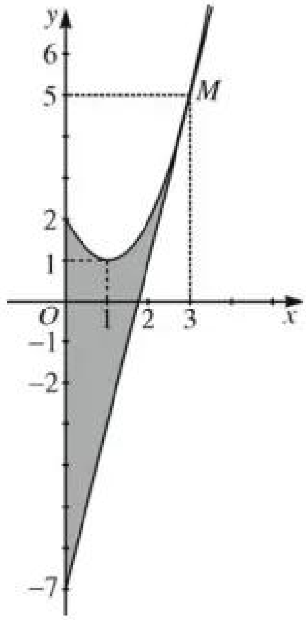
Hình 3.15

52. a) (h.3.16)

Tiếp tuyến có phương trình $y = 4x - 7$. Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có

$$S = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = 9.$$

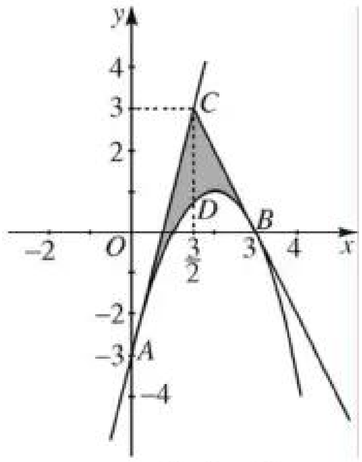


Hình 3.16

b) Tiếp tuyến tại $A(0\ ; -3)$ là $y = 4x - 3$. Tiếp tuyến tại $B(3\ ; 0)$ là $y = -2x + 6$.

Giao điểm của hai tiếp tuyến là $C\left(\frac{3}{2}\ ; 3\right)$. Kí hiệu A_1 và A_2 là tam giác cong ACD và BCD (h.3.17). Ta có

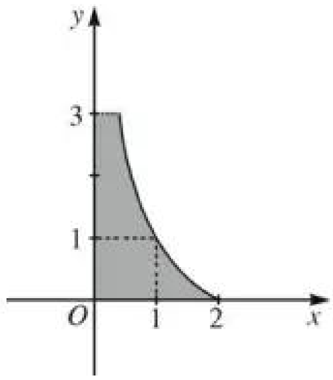
$$S(A_1) = \int_0^{\frac{3}{2}} (4x - 3 + x^2 - 4x + 3)\,dx = \frac{9}{8}.$$



Hình 3.17

$$S(A_2) = \int_{\frac{3}{2}}^{3} (-2x + 6 + x^2 - 4x + 3)\,dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x-3)^2\,dx = \frac{9}{8}.\ \text{Vậy } S = \frac{9}{4}.$$

53. $V = \int_0^2 \pi \frac{5x^4}{8}\,dx = 4\pi.$



Hình 3.18

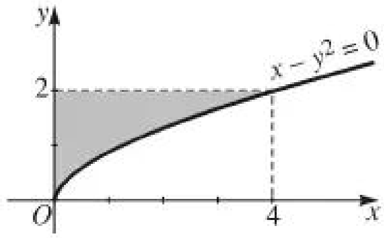
54. $V = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 3\pi.$

55. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \pi.$

56. (h.3.18) Đường cong có phương trình $x = \dfrac{2}{y+1}$.

Vậy $V = \pi \int_0^3 \dfrac{4}{(y+1)^2}\,dy = 3\pi.$

57. (h.3.19)



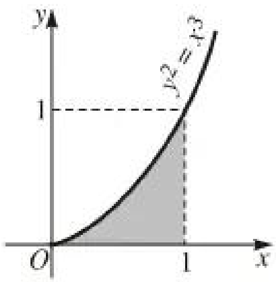
Hình 3.19

a) $V = 16\pi - \pi \int_0^4 x\,dx = 8\pi.$

b) $V = \pi \int_0^2 y^4\,dy = \dfrac{32}{5}\pi.$

58. $\pi \int_1^2 xe^x\,dx = \pi e^2.$

59. (h.3.20)



Hình 3.20

a) Ta có $y = \sqrt{x^3}$ $(y \geq 0)$. Vậy $V = \pi \int_0^1 x^3\,dx = \dfrac{\pi}{4}.$

b) Ta có $x = \sqrt[3]{y^2}$. Vậy $V = \pi - \pi \int_0^1 y^{\frac{4}{3}}\,dy = \dfrac{4\pi}{7}.$

60. (B)

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^5 = \ln 3.$$

61. (B)

$$\int_0^2 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2 = \mathrm{e}^4 - 1.$$

62. (D) Ta có $\int_{-1}^{0} x^2(x+1)^3\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2(x^3+3x^2+3x+1)\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{0}(x^5+3x^4+3x^3+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{60}.$$

63. (A)

$$S = \int_0^2 (4x - x^3)\mathrm{d}x = 4.$$

64. (B)

$$S = \int_0^1 (8x - x)\mathrm{d}x + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3)\mathrm{d}x = \frac{63}{4} = 15,75.$$

65. (A)

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

66. (A)

$$V = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}y + \int_4^6 \pi\left(6-y\right)^2 \mathrm{d}y = 8\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}.$$

67. (C)

$$V = \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0} \left(-bx\right)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0} \left(ax^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0} (b^2x^2 - a^2x^4)\mathrm{d}x = \frac{2\pi b^5}{15a^3}.$$

Vì $\dfrac{b^5}{a^3}$ là hằng số với mọi giá trị của *a*, *b* do đó phải chọn (C).

Khi đó $V = \dfrac{4\pi}{15}$.

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 hãy chọn chỉ một kết quả đúng trong các kết quả đã cho

Câu 1 *(1 điểm)*. Nguyên hàm của hàm số $y = x\cos x$ là

(A) $-\dfrac{x^2\sin x}{2} + C$; (B) $\dfrac{x^2\cos x}{2} + C$;

(C) $-x\cos x + \sin x + C$; (D) $x\sin x + \cos x + C$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Nếu $\int\limits_{-2}^{0}(4 - e^{-\frac{x}{2}})\,dx = K - 2e$ thì giá trị của *K* là

(A) 10 ; (B) 11 ; (C) 9 ; (D) 12,5 .

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hàm số $y = f(x) = x(x-1)(x-2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

(A) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$; (B) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \int\limits_1^2 f(x)\,dx$;

(C) $\left|\int\limits_0^2 f(x)\,dx\right|$; (D) $\left|\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right|$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(3 điểm)*. Tính tích phân $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Câu 5 *(4 điểm)*. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 2x$ trên đoạn $[-1 ; 2]$ và trục hoành.

Đáp án

Câu 1. Bằng cách tính đạo hàm cho ta kết quả đúng là (D).

Câu 2. (A)

Câu 3. (B)

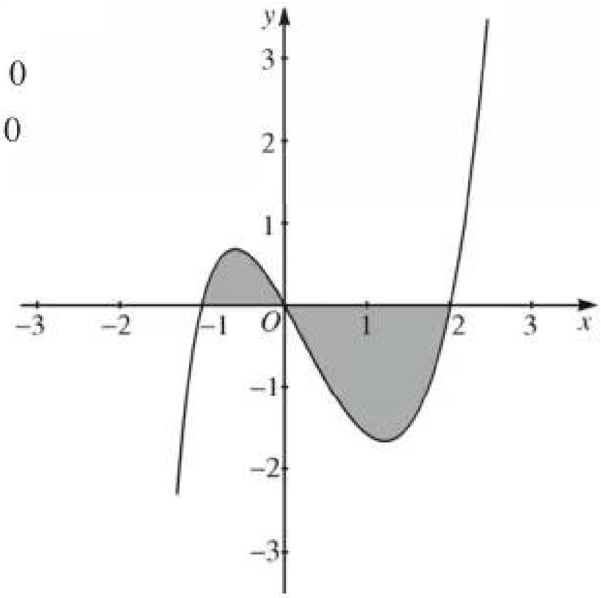
Câu 4. Đặt $x = 2\sin t$ ta dẫn đến $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \pi$.

Câu 5. (h.3.21). Ta có $x^3 - x^2 - 2x \geq 0$ trên $[-1 ; 0]$ và $x^3 - x^2 - 2x \leq 0$ trên $[0 ; 2]$. Vậy

$$S = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$

$$+ \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3)\,dx$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}.$$



Hình 3.21

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 hãy chọn chỉ một kết quả đúng trong các kết quả đã cho

Câu 1 *(1 điểm)*. Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ là

(A) $\sqrt{x^2 + x + C}$; (B) $\sqrt{x^2 + x} + C$;

(C) $\dfrac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$; (D) $\dfrac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tập hợp các giá trị của b sao cho $\int_0^b (2x - 4)\,dx = 5$ là

(A) $\{5\}$; (B) $\{5 ; -1\}$; (C) $\{4\}$; (D) $\{4 ; -1\}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình đó quanh trục hoành được cho bởi công thức :

(A) $\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx$; (B) $\pi^2\int_0^1 e^{2x}\,dx$;

(C) $\pi\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)^2$; (D) $\left(\pi\int_0^1 e^x\,dx\right)^2$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(3 điểm)*. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$.

Câu 5 *(4 điểm)*. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = x$.

Đáp án

Câu 1. (C)

Câu 2. (B)

Câu 3. (A)

Câu 4. Tích phân từng phần ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\,d(\sin x)$$

$$= \int_0^1 (1 - u^2)\,du = \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Câu 5. Ta có

$$S = \int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right| dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx + \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 4 + 4 = 8.$$