

## LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là rèn luyện cho học sinh có kỹ năng thành thạo trong việc xét chiều biến thiên của hàm số và sử dụng nó để chứng minh một vài bất đẳng thức đơn giản.

### *Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập*

6. a) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  ;
- b) Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  ;
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty ; 5)$  và  $(5 ; +\infty)$ .
- d) Hàm số xác định trên đoạn  $[0 ; 2]$ .

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$x$	0	1	2	
$y'$		+	0	-
$y$		1		

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .  
(Có thể nói rằng hàm số đồng biến trên đoạn  $[0; 1]$  và nghịch biến trên đoạn  $[1; 2]$ ).

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

f) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

7.  $f'(x) = -2(\sin 2x + 1) \leq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi đoạn  $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ .

Do đó hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

*Cách giải khác.* Ta chứng minh hàm số  $f$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ , tức là

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad (1)$$

Thật vậy, lấy hai số  $a, b$  sao cho  $a < x_1 < x_2 < b$ . Ta có

$$f'(x) = -2(\sin 2x + 1) \leq 0 \text{ với mọi } x \in (a; b).$$

Dễ thấy  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm của khoảng  $(a; b)$ . Do đó hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$ . Từ đó ta có bất đẳng thức (1).

8. a) Hàm số  $f(x) = x - \sin x$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  và có đạo hàm

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số đồng biến trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  và ta có

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ tức là}$$

$$x - \sin x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Hiển nhiên

$$x > \sin x \text{ với mọi } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ vì } \sin x \leq 1.$$

Do đó  $x > \sin x$  với mọi  $x > 0$ .

b) Hàm số  $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$  liên tục trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$  và có đạo hàm

$$g'(x) = x - \sin x.$$

Theo a),  $g'(x) > 0$  với mọi  $x > 0$ . Do đó hàm số  $g$  đồng biến trên  $[0; +\infty)$  và ta có

$$g(x) > g(0) \text{ với mọi } x > 0,$$

tức là

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0 \text{ với mọi } x > 0. \quad (1)$$

Từ đó suy ra với mọi  $x < 0$ , ta có

$$\cos(-x) + \frac{(-x)^2}{2} - 1 > 0, \text{ hay}$$

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0 \text{ với mọi } x < 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

c) Hàm số  $h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$  có đạo hàm

$$h'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Theo b),  $h'(x) < 0$  với mọi  $x \neq 0$ . Do đó hàm số  $h$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  và ta có

$$h(x) < h(0) \text{ với mọi } x > 0,$$

và

$$h(x) > h(0) \text{ với mọi } x < 0.$$

Từ đó ta có hai bất đẳng thức cần chứng minh.

9. Hàm số  $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  và có đạo hàm

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

vì  $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 2$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Do đó hàm số  $f$  đồng biến trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  và ta có

$$f(x) > f(0) = 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

10. a) Vào năm 1980, ta có  $t = 10$ ;  $f(10) = 18$ . Số dân của thị trấn năm 1980 là 18 nghìn người.

$f(25) = 22$ . Số dân của thị trấn năm 1995 là 22000 người.

b)  $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0$  với mọi  $t > 0$ .

Hàm số đồng biến trên  $[0; +\infty)$ .

c) • Tốc độ tăng dân số vào năm 1990 là

$$f'(20) = \frac{120}{25^2} = 0,192.$$

• Tốc độ tăng dân số vào năm 2008 là

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065.$$

$$\bullet \frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t+5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$$

Vào năm 1996 tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.