LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập nhằm rèn luyện cho HS kĩ năng tính được căn bậc hai của số phức và giải phương trình bậc 2 với hệ số phức.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

23. Phương trình $z + \frac{1}{z} = k$ tương đương với $z^2 - kz + 1 = 0$ nên có hai nghiệm là $z = \frac{k \pm \delta}{2}$ trong đó δ là một căn bậc hai của $k^2 - 4$.

a) Khi $k = 1$ thì $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

b) Khi $k = \sqrt{2}$ thì $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

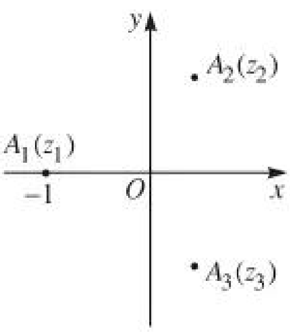
c) Khi $k = 2i$ thì $z = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)i$.

24. a) $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$.

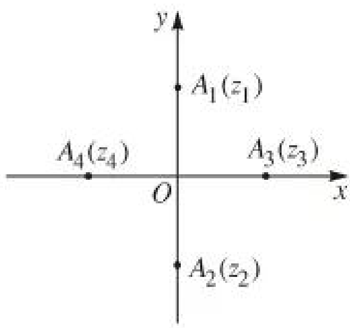
Nghiệm của $z + 1 = 0$ là $z_1 = -1$.

Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ tương đương với $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ nên có hai nghiệm là $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy $z^3 + 1 = 0$ có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 (xem hình 4.3).



Hình 4.3



Hình 4.4

b) $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1)$.

Nghiệm của $z^2 + 1 = 0$ là $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Nghiệm của $z^2 - 1 = 0$ là $z_3 = 1$, $z_4 = -1$.

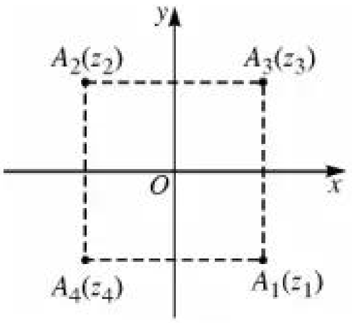
Vậy $z^4 - 1 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.4).

c) $z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i)$.

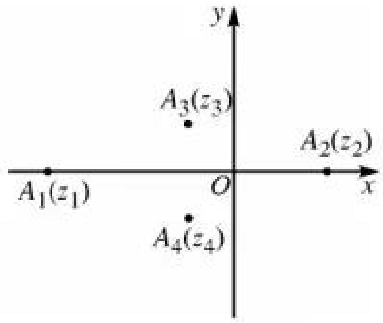
Nghiệm của $z^2 + 2i = 0$ là các căn bậc hai của $-2i$, đó là $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$.

Nghiệm của $z^2 - 2i = 0$ là các căn bậc hai của $2i$, đó là $z_3 = 1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

Vậy $z^4 + 4 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.5).



Hình 4.5



Hình 4.6

d) $8z^4 + 8z^3 = z + 1 \Leftrightarrow (z+1)(8z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (z+1)(2z-1)(4z^2 + 2z + 1) = 0$.

Nghiệm của $z + 1 = 0$ là $z_1 = -1$.

Nghiệm của $2z - 1 = 0$ là $z_2 = \frac{1}{2}$.

Nghiệm của $4z^2 + 2z + 1 = 0$ hay $\left(2z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ là $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ và $z_4 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.6).

25. a) $1 + i$ là một nghiệm của $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) khi và chỉ khi $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$ tức là $b + c + (2+b)i = 0$.

Vậy $b + c = 0$ và $2 + b = 0$; suy ra $b = -2$, $c = 2$.

b) $1 + i$ là một nghiệm của $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) khi và chỉ khi $(1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$ tức là $(b + c - 2) + (2 + 2a + b)i = 0$.

Vậy $\begin{cases} b + c - 2 = 0 & (1) \\ 2a + b + 2 = 0. & (2) \end{cases}$

Ta có 2 là một nghiệm của $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ khi và chỉ khi $8 + 4a + 2b + c = 0$. (3)

(2) và (3) cho $c = -4$. Khi đó (1) cho $b = 6$ và từ đó (2) cho $a = -4$.

Vậy $a = -4$, $b = 6$, $c = -4$.

26. a) Với mọi số thực φ, ta có

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + (2\sin\varphi\cos\varphi)i = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$

Vậy các căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ là $\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Còn theo cách giải trong bài học, để tìm các căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$, ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \cos 2\varphi \\ 2xy = \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Rõ ràng các cặp $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ là nghiệm của hệ, tức là $\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là hai căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$; ta đã biết rằng chỉ có hai căn như thế nên đó là tất cả các căn bậc hai cần tìm.

b) Viết $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ thì theo câu a), $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ có hai căn bậc hai là

$$\pm\left(\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right) = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Rõ ràng

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Vậy hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$.

Còn theo bài học, việc tìm các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ đưa về việc giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Hệ đó tương đương với

$$\begin{cases} 8x^4 - 4\sqrt{2}x^2 - 1 = 0 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4x} \end{cases}$$

nên có các nghiệm là $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Vậy ta lại được hai căn bậc hai đã viết ở trên.