LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập là nhằm rèn luyện cho HS kĩ năng tìm acgumen của số phức ; viết số phức dưới dạng lượng giác ; thực hiện phép tính nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

32. $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$

$= \cos^4\varphi + 4(\cos^3\varphi)(i\sin\varphi) + 6(\cos^2\varphi)(i^2)\sin^2\varphi$

$\qquad + 4(\cos\varphi)(i^3\sin^3\varphi) + i^4\sin^4\varphi$

$= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + (4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)i.$

Từ đó $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$

$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi.$

33. • $(\sqrt{3} - i)^6 = \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^6$

$= 2^6[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] = -2^6.$

• $\frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = \frac{1}{2^{1002}}\left(\cos\frac{2004\pi}{4} + i\sin\frac{2004\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2^{1002}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{1}{2^{1002}}.$

(*Chú ý :* do $(1+i)^2 = 2i$, cũng dễ thấy $\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^{2004} = \dfrac{(2i)^{1002}}{2^{2004}} = -\dfrac{1}{2^{1002}}$).

• Ta có $\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \dfrac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{1+12} = \dfrac{-13+13i\sqrt{3}}{13} = -1+i\sqrt{3}$

$= 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Từ đó,

$$\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} = 2^{21}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{21}.$$

34. $\omega = -\dfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$, nên với số n nguyên dương, ta có $\omega^n = \cos\dfrac{4n\pi}{3} + i\sin\dfrac{4n\pi}{3}$. Số này là số thực khi và chỉ khi $\sin\dfrac{4n\pi}{3} = 0$; điều này xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{4n}{3}$ là số nguyên, tức là khi và chỉ khi n là một bội nguyên dương của 3.

Số ω^m (m nguyên dương) là số ảo khi và chỉ khi $\cos\dfrac{4m\pi}{3} = 0$ tức là khi và chỉ khi có số nguyên k để $\dfrac{4m}{3} = \dfrac{1}{2} + k$. Khi đó $8m - 6k = 3$, vế trái chia hết cho 2, vế phải không chia hết cho 2. Vậy không có số nguyên dương m để ω^m là số ảo.

35. a) Một acgumen của iz là $\dfrac{5\pi}{4}$ thì một acgumen của $z = \dfrac{iz}{i}$ là $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Vậy $z = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Từ đó dạng lượng giác của các căn bậc hai của z là $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$ và $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{11\pi}{8} + i\sin\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

b) Gọi φ là một acgumen của z thì $-\varphi$ là một acgumen của $\bar{z}$. Do một acgumen của $1+i$ là $\dfrac{\pi}{4}$ nên một acgumen của $\dfrac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\varphi - \dfrac{\pi}{4}$. Vậy theo giả thiết, $-\varphi - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, từ đó $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$. Suy ra

$z = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó dạng lượng giác của các căn bậc hai của z là $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ và $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

36. a) $1 - i\tan\frac{\pi}{5} = 1 - i\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right].$$

b) $\tan\frac{5\pi}{8} + i = \frac{-1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(-\sin\frac{5\pi}{8} - i\cos\frac{5\pi}{8}\right)$ (để ý rằng $\cos\frac{5\pi}{8} < 0$)

$$= \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

c) $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ là dạng lượng giác cần tìm.

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$, thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$

$= \left(-2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ là dạng lượng giác cần tìm.

Còn khi $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 0 = 0(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ tuỳ ý).