LUYỆN TẬP (1 tiết)

Các bài tập của tiết luyện tập này nhằm rèn luyện cho học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc tìm cực trị cũng như tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

21. a) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\dfrac{3}{2}$; $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6\dfrac{3}{4}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $f(0) = \sqrt{5}$.

d) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty)$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ với $x < -1$ hoặc $x > 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	//////	‖	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	//////	1	$\nearrow$	

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty ; -1]$ và đồng biến trên $[1 ; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

22. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m = 0 & (1) \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Phương trình (1) không có nghiệm $x = 1$ khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Hàm số f có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

23. $G(x) = 0{,}75x^2 - 0{,}025x^3$, $x > 0$.

$G'(x) = 1{,}5x - 0{,}075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 20$.

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$G'(x)$	//////	$-$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	//////	//////		$\nearrow$	100	$\searrow$	

$\max\limits_{x>0} G(x) = G(20) = 100.$

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20mg. Khi đó, độ giảm huyết áp là 100.

24. Gọi $M(x\,;\,x^2)$ là một điểm bất kì của parabol $(\mathscr{P})$.

Ta có

$$AM^2 = (x+3)^2 + x^4 = x^4 + x^2 + 6x + 9.$$

Khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $z = AM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$z = x^4 + x^2 + 6x + 9$;

$z' = 4x^3 + 2x + 6 = (x+1)(4x^2 - 4x + 6)$;

$z' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	
z		$\searrow$	5	$\nearrow$	

z đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -1$; $z(-1) = 5$. Do đó khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi M ở vị trí của điểm $M_0(-1\,;\,1)$; $AM_0 = \sqrt{5}$.

25. Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ (km/h). Thời gian cá bơi để vượt khoảng cách 300km là

$$t = \frac{300}{v-6} \text{ (giờ)}.$$

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là

$E(v) = cv^3.\dfrac{300}{v-6} = 300c.\dfrac{v^3}{v-6}$ (jun), $v > 6$.

$E'(v) = 600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$;

$E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$; $v = 0$ (loại do $v > 6$).

x	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Để ít tiêu hao năng lượng nhất, cá phải bơi với vận tốc (khi nước đứng yên) là 9 (km/h).

26. Số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là

$$f(t) = 45t^2 - t^3, \ t \text{ nguyên và thuộc } [0\ ;\ 25].$$

Để xét tốc độ truyền bệnh người ta xem hàm số f là xác định trên đoạn $[0\ ;\ 25]$.

a) $f'(t) = 90t - 3t^2 = 3t(30 - t)$.

Tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ năm là

$f'(5) = 375$ (người / ngày).

b) $f''(t) = 90 - 6t$; $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

t	0		15		$+\infty$
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Tốc độ truyền bệnh là lớn nhất vào ngày thứ 15. Tốc độ đó là

$f'(15) = 675$ (người / ngày).

c) $f'(t) > 600 \Leftrightarrow 90t - 3t^2 > 600$

$\Leftrightarrow t^2 - 30t + 200 < 0$

$\Leftrightarrow 10 < t < 20.$

Từ ngày thứ 11 đến ngày thứ 19, tốc độ truyền bệnh là lớn hơn 600 người mỗi ngày.

d) $f'(t) = 3t(30 - t) > 0$ với mọi $t \in (0\ ;\ 25)$.

Hàm số f đồng biến trên $[0\ ;\ 25]$.

27. a) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{3 - 2x}} < 0$ với mọi $x \in \left(-\infty\ ;\ 1\dfrac{1}{2}\right)$. Hàm số f nghịch biến trên đoạn $[-3\ ;\ 1]$. Do đó

$\max\limits_{x \in [-3;1]} f(x) = f(-3) = 3$ và $\min\limits_{x \in [-3;1]} f(x) = f(1) = 1$.

b) Hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[-2\,;2]$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ với mọi $x \in (-2\,;2)$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$; $f(-2) = -2$; $f(2) = 2$.

So sánh các giá trị trên, ta được

$\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$ và $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2$.

c) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 2\dfrac{3}{4}$.

d) $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Với $-\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $f'(x) = 0$ tại các điểm $-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$.

Ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $f(\pi) = \pi$.

So sánh năm giá trị trên, ta được

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

28. Hình vuông có cạnh dài 10 cm.