B – ĐỀ BÀI

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.1. Chọn phương án đúng trong bốn phương án đã cho trong mỗi câu sau :

a) Hàm số $y = \tan(\frac{\pi}{2}\cos x)$ chỉ không xác định tại :

(A) $x = 0$; (B) $x = 0$ và $x = \pi$;

(C) $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$ chỉ xác định khi :

(A) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $x = 0$;

(C) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ là :

(A) $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (B) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

(C) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (D) $\mathbb{R} \setminus \{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

a) Hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$;

b) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; 0]$;

c) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{3}]$.

1.3. Giả sử trên khoảng J, hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ có dấu không đổi. Chứng minh :

a) Nếu trên J, hai hàm số đó cùng dấu thì hàm số này đồng biến khi và chỉ khi hàm số kia nghịch biến ;

b) Nếu trên J hai hàm số đó khác dấu thì hai hàm số đó hoặc cùng đồng biến hoặc cùng nghịch biến.

1.4. Lập bảng biến thiên của

a) Các hàm số $y = -\sin x$, $y = \cos x - 1$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$;

b) Hàm số $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ trên đoạn $[-\frac{4\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}]$;

c) Hàm số $y = -\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ trên đoạn $[-\frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}]$.

1.5. Chứng minh rằng số T thoả mãn $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra số T dương nhỏ nhất thoả mãn $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là 2π (tức là hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π).

1.6. Từ tính chất của hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, hãy chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$;

b) Hàm số $y = A\cos(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

1.7. Chứng minh rằng các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số :

a) $y = \sin^2 2x + 1$; b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

1.8. Chứng minh rằng số π là số dương T nhỏ nhất thoả mãn điều kiện : Với mọi $x \in \mathcal{D}_1 \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ta có $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + \pi) = \tan x$ (tức là hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π).

1.9. Từ tính chất hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π, hãy chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = A\tan\omega x + B$ (A, B, ω là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{\pi}{|\omega|}$;

b) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.10. Chứng minh rằng các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn – lẻ của mỗi hàm số :

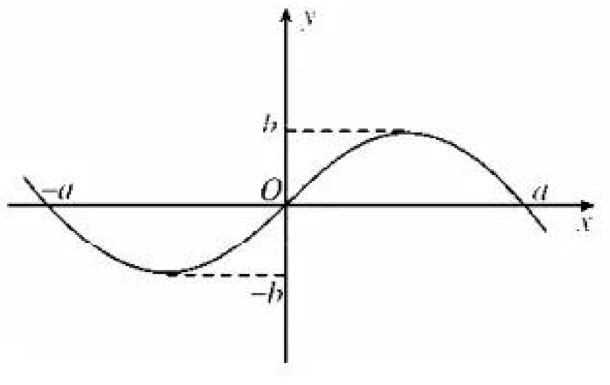
a) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; c) $y = \tan^2 x$.

1.11. Xét hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$). Chứng minh :

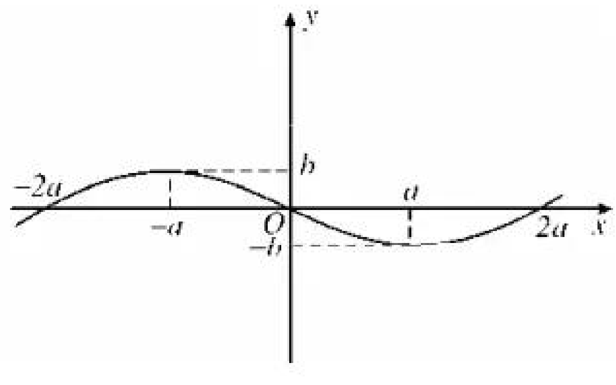
a) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số theo thứ tự là $|A| + B$; $-|A| + B$;

b) Khi $A > 0$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + k\dfrac{2\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.12. Cho biết rằng mỗi đồ thị sau (h.1.1, h.1.2) là đồ thị của hàm số có dạng $y = A\sin\omega x$ (A, ω là những hằng số). Hãy xác định A, ω cho mỗi hàm số.



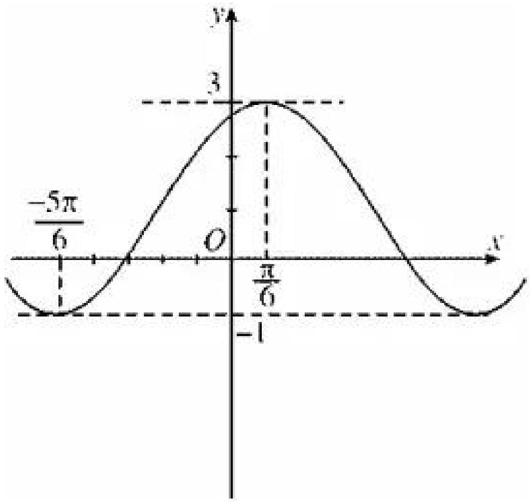
Hình 1.1



Hình 1.2

1.13. Cho biết đồ thị (h.1.3) sau là đồ thị hàm số

$y = A\sin(x + \alpha) + B$ (A, B ,α là những hằng số). Hãy xác định A, B, α.



Hình 1.3

1.14. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mọi khoảng $(a\ ;\ b)$ nằm trong tập xác định $\mathcal{D}_1$ của nó.

b) Có phải trên bất cứ khoảng nào hàm số $y = \tan x$ đồng biến thì hàm số $y = \cot x$ nghịch biến ?

1.15. Chứng minh :

a) Điểm có toạ độ $(k\pi\ ;\ 0)$ (k là một số nguyên) là tâm đối xứng của đồ thị của hàm số $y = \sin x$;

b) Điểm có toạ độ $(\frac{k\pi}{2}\ ;\ 0)$ (k là một số nguyên) là tâm đối xứng của đồ thị của hàm số $y = \tan x$;

c) Đường thẳng có phương trình $x = k\pi$ (k là một số nguyên) là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = \cos x$.

1.16. Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 2\tan x$;　　　　b) $y = \tan 2x$;

c) $y = \tan\frac{x}{2}$.

Vẽ đồ thị của các hàm số đó.

1.17. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(\frac{\pi}{4}\ ;\ 1)$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$;　　　　b) $y = \cos 2x - 1$;

c) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$;　　　　d) $y = \cos|x| - 1$.

1.18. Phép đối xứng qua điểm $I(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0)$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos 2x$;

c) $y = \sin \frac{x}{2}$.

Vẽ đồ thị của các hàm số tìm được.

1.19. Phép đối xứng qua đường thẳng có phương trình $y = 1$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x + 1$;

c) $y = \sin \frac{x}{2} + 2$.

Vẽ đồ thị của các hàm số tìm được.