

B - ĐỀ BÀI

§1. DÃY CÓ GIỚI HẠN 0

4.1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 :

$$\text{a) } \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}}; \quad \text{b) } \frac{1}{n!}; \quad \text{c) } \frac{\sin n}{n\sqrt{n+1}}.$$

4.2. Chứng minh rằng hai dãy số (u_n) , (v_n) với

$$u_n = \frac{1 + \cos n^2}{2n+1}; \quad v_n = \frac{n + \sin 2n}{n^2 + n}$$

có giới hạn 0.

4.3. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \frac{\sqrt{5^n}}{3^n + 1}; & \text{b) } u_n = \frac{(-1)^n \sin n^2 + \cos n}{2\sqrt[3]{n} + 1}; \\ \text{c) } u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}; & \text{d) } u_n = \frac{n + \cos \frac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n} + \sqrt{n}}. \end{array}$$

4.4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2} \text{ với mọi } n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\text{a) } 0 < u_n \leq \frac{1}{4} \text{ với mọi } n; \quad \text{b) } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4} \text{ với mọi } n.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

4.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ và

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi } n.$$

b) Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

4.6. Chứng minh rằng

a) $\lim 2(\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0$, b) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.