

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

5.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$ (m, n là các hằng số);

b) $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$;

c) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;

d) $y = \frac{v^3 - 2v}{v^2 + v + 1}$;

e) $y = \frac{1}{t^2 - 3t + 1}$.

5.9. Cho hàm số

$$f(x) = 3x - 2\sqrt{x}.$$

Tính $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$ và $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

5.10. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (1-x)^{20}$;

b) $y = \left(t^3 - \frac{1}{t^3} + 3t\right)^5$;

c) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (a là hằng số).

5.11. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = f(x^2)$;

b) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$,

biết rằng f và g là các hàm số có đạo hàm trên \mathbb{R} .

5.12. Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số chẵn là hàm số lẻ và đạo hàm của hàm số lẻ là hàm số chẵn, biết rằng các hàm số đó có đạo hàm trên \mathbb{R} .

5.13. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3.$$

Tìm m để

a) $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;

b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x ;

c) $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$;

d) $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

5.14. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2.$$

Tìm m để

a) $f'(x) > 0$ với mọi x ;

b) $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu ;

c) Chứng minh rằng trong trường hợp $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) thì các nghiệm này thoả mãn một hệ thức độc lập với m .

5.15. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f'(x) = 0$ với sai số tuyệt đối không vượt qua 10^{-4} , biết :

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$;

b) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$.

5.16. Cho hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}.$$

Giải bất phương trình

$$f'(x) \leq 1.$$

5.17. Gọi (\mathcal{C}) là đồ thị của hàm số

$$y = x^3 - 5x^2 + 2.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của (\mathcal{C}) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y = -3x + 1$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$;

c) Đi qua điểm $A(0 ; 2)$.

5.18. Gọi (\mathcal{C}) là đồ thị của hàm số

$$y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + x.$$

Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (\mathcal{C}) tại điểm $A(-1 ; 0)$ cũng là tiếp tuyến của (\mathcal{C}) tại một tiếp điểm khác. Tìm các tọa độ của tiếp điểm đó.