

§2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

4.7. Áp dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \left(3 + \frac{n^2 \sin 3n}{n^3 + 1} \right) ;$

b) $\lim \left(\frac{n}{n^2 + 1} - 1 \right) ;$

c) $\lim \frac{2n}{2n + 1} ;$

d) $\lim \frac{n + 1}{2n + 1} ;$

e) $\lim \frac{5 \cdot 2^n - \cos 5n}{2^n} ;$

f) $\lim \frac{n^2 + 2n + 3}{2(n + 1)^2} .$

4.8. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \frac{2n^5 - 7n^2 - 3}{n - 3n^5} ;$

b) $u_n = \frac{2n^2 - n + 4}{\sqrt{2n^4 - n^2 + 1}} ;$

c) $u_n = \frac{n^3 - n^2 \sin 3n - 1}{2n^4 - n^2 + 7} ;$

d) $u_n = \frac{7 \cdot 2^n + 4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n} ;$

e) $u_n = \frac{5 \cdot 2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} ;$

f) $u_n = \sqrt{\frac{n^6 + 3n^3 - 3}{2n^6 + n^5 + 2}} .$

4.9. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Chứng minh rằng nếu $\lim u_n = 0$ và tồn tại một số dương c sao cho $|v_n| \leq c$ với mọi n thì $\lim(u_n v_n) = 0$.

4.10. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}.$$

4.11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 10, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a) $u_n > 1$ với mọi n .

b) $u_{n+1} - 1 < \frac{u_n - 1}{2}$ với mọi n .

c) Tìm $\lim u_n$.

4.12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = -5, \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6. \end{cases}$$

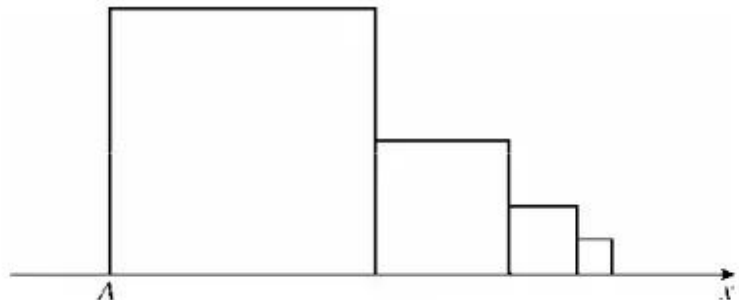
Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = u_n + 18$.

a) Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn ;

b) Tính tổng của cấp số nhân (v_n) và tìm $\lim u_n$.

4.13. Người ta xếp các hình vuông kê với nhau như trong hình 4.1 dưới đây, mỗi hình vuông có độ dài cạnh bằng nửa độ dài cạnh của hình vuông trước nó.

Nếu hình vuông đầu tiên có cạnh dài 10cm thì trên tia Ax cần có một đoạn thẳng dài bao nhiêu xentimét để có thể xếp được tất cả các hình vuông đó ?



Hình 4.1

4.14. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 81m. Mỗi lần chạm đất, quả bóng lại nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

4.15. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số :

a) 0,222... ;

b) 0,393939... ;

c) 0,27323232...

4.16. Cho hai số dương a, b và dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

Tim $\lim u_n$ trong các trường hợp sau :

$$a = b ; a < b ; a > b.$$

4.17. Chứng minh rằng nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

H.D. Xét trường hợp $0 < q < 1$. Khi đó $p = \frac{1}{q} > 1$. Do đó

$$p = 1 + h \text{ với } h = p - 1 > 0 \text{ và } \frac{1}{q^n} = p^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \text{ với mọi } n.$$

4.18. Các dãy số (u_n) và (v_n) với

$$u_n = \cos n\pi, v_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

có giới hạn hay không ?

4.19. a) Chứng minh rằng nếu dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và dãy (v_n) không có giới hạn hữu hạn thì dãy số $(u_n + v_n)$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Dãy số $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn hay không ?

4.20. a) Chứng minh rằng nếu dãy số (u_n) không có giới hạn hữu hạn thì với mọi số $c \neq 0$, dãy (cu_n) cũng không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) không có giới hạn hữu hạn. Có thể kết luận rằng dãy số $(u_n + v_n)$ có giới hạn hữu hạn được không?