§2. DÃY SỐ

3.8. Hãy tính 6 số hạng đầu tiên của mỗi dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - 2^n$;

b) Dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{3^n}{n^3}$.

3.9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{4} + \cos^2\dfrac{2n\pi}{3}$.

Hãy điền các số thích hợp vào các ô trống của bảng dưới đây :

n	1	2	3	4	5
u_n					

3.10. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x^2+1}$.

Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C})$ và đường thẳng $x = n$.

Xét dãy số (u_n) với u_n là tung độ của điểm A_n. Hãy tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số đó.

3.11. Cho các dãy số (u_n) và (v_n), xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = 3u_n + 10 \text{ với mọi } n \geq 1\ ;$$

$$v_1 = 5,\ v_2 = 0 \text{ và } v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Hãy điền các số thích hợp vào các ô trống của bảng dưới đây :

n	3	5	7
u_n			
v_n			

3.12. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5.\,4^{n-1} + 3$.

a) Chứng minh rằng $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với mọi $n \geq 1$.

b) Dựa vào kết quả của phần a), hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

3.13. Cho các dãy số (u_n) và (v_n), với $u_n = n$ và $v_n = 2^n + n$.

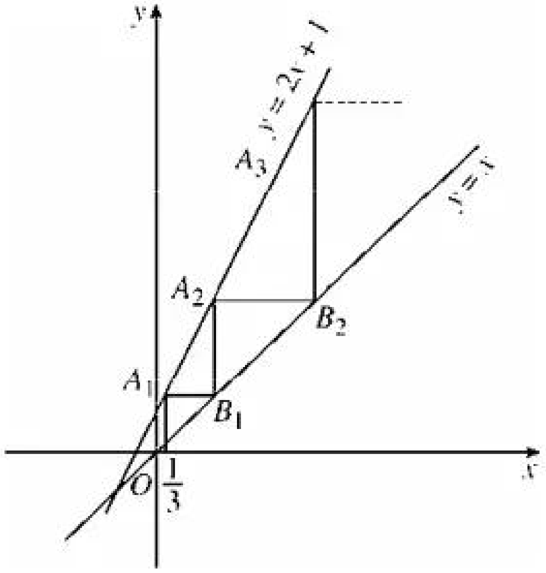
a) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta luôn có

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \text{ và } v_{n+1} = 2v_n - n + 1.$$

b) Em có thể rút ra nhận xét gì từ kết quả đã chứng minh được ở phần a) ?

3.14. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = 2x + 1$. Trên $(\mathscr{C})$ lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$. Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng Δ chứa đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại điểm B_1 ; gọi A_2 là giao điểm của $(\mathscr{C})$ với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2, lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm

A_1 ta sẽ được điểm A_3. Với điểm A_3, lại làm như thế ta được điểm A_4. Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ được một dãy vô hạn các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ nằm trên đồ thị $(\mathscr{C})$. (h.3.1).



Hình 3.1

Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n là hoành độ của điểm A_n. Hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

3.15. Hãy xét tính tăng – giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 2n^3 - 5n + 1$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = 3^n - n$;

c) Dãy số (c_n) với $c_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

3.16. Hãy xét tính tăng – giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$;

b) Dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$;

c) Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

3.17. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n + 1}$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$.

3.18. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$.

3.19. Hãy xác định số thực a để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{an^2 + 1}{2n^2 + 3}$, là :

a) Một dãy số giảm ;

b) Một dãy số tăng.

3.20. Chứng minh rằng dãy số (v_n), với $v_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$, là một dãy số bị chặn.

3.21. Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{7n + 5}{5n + 7}$, là một dãy số tăng và bị chặn.

3.22. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{3} + \cos\dfrac{n\pi}{6}$.

a) Hãy tính u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+12}$ với mọi $n \geq 1$.

3.23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin(2n - 1)\dfrac{\pi}{3}$.

a) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 17 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

3.24. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 1 \text{ và } v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính v_2, v_3 và v_4.

b) Chứng minh rằng $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

3.25. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 7 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = 7n - 6$ với mọi $n \geq 1$.

3.26. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 2 \text{ và } v_{n+1} = 5v_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính v_2, v_4 và v_6 .

b) Chứng minh rằng $v_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

3.27. Với dãy số (u_n) cho ở bài tập 3.11, chứng minh rằng

$$u_n = 2.3^n - 5$$

với mọi $n \geq 1$.

3.28. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 2 \text{ và } v_{n+1} = 3v_n + 2n - 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $v_n = 3^n - n$ với mọi $n \geq 1$.

3.29. Cho dãy số (u_n), xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{4} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số không đổi.