

§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

5.19. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 3x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$.

5.20. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$;

b) $y = \frac{\tan t}{t}$;

c) $y = \frac{t \sin t}{1 + \tan t}$;

d) $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$;

e) $y = \cot \sqrt{x^2 - x + 1}$;

g) $y = \sin(2 \sin x)$;

h) $y = \cos^3 4x$;

i) $y = \sin^2(\cos 3x)$.

5.21. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ và $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (nếu có) biết

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

5.22. Cho hai hàm số

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ và } g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x.$$

Chứng minh rằng

$$f'(x) = g'(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

5.23. Chứng minh các công thức sau ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

a) $(\sin^n x \cdot \cos nx)' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$;

b) $(\sin^n x \cdot \sin nx)' = n \sin^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x$.

5.24. Chứng minh rằng hàm số sau đây có đạo hàm bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x.$$

5.25. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết

a) $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x - 2x - 5$;

b) $f(x) = \frac{2 \cos 17x}{17} - \frac{\sqrt{3} \sin 5x}{5} + \frac{\cos 5x}{5} + 2.$

5.26. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, biết rằng

$$f(x) = a \cos x + 2 \sin x - 3x + 1.$$

5.27. Giải và biện luận phương trình $f'(x) = 0$ biết rằng

$$f(x) = \sin 2x + 2(1 - 2m) \cos x - 2mx.$$