

### §3. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

4.21. Tìm giới hạn của các dãy số  $(u_n)$  với

a)  $u_n = -n^4 - 50n + 11$  ;

b)  $\sqrt[3]{7n^2 - n^3}$  ;

c)  $u_n = \sqrt{5n^2 - 3n + 7}$  ;

d)  $\sqrt{2n^3 + n^2 - 2}$  .

4.22. Tìm giới hạn của các dãy số  $(u_n)$  với

a)  $u_n = \frac{3n - n^3}{2n + 15}$  ;

b)  $u_n = \frac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 7}}{3n + 5}$  ;

c)  $u_n = \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$  ;

d)  $u_n = \frac{(2n + 1)(1 - 3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}}$  .

4.23. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1})$  ;

b)  $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$  .

4.24. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim(1,001)^n$  ;

b)  $\lim(3 \cdot 2^n - 5^{n+1} + 10)$  ;

c)  $\lim \frac{3^n - 11}{1 + 7 \cdot 2^n}$  ;

d)  $\lim \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}$  .

4.25. Tìm giới hạn của dãy số  $(u_n)$  với

a)  $u_n = \frac{1}{n^2 - n + 2}$  ;

b)  $u_n = \frac{3}{\sqrt{n^4 - n^2 + n}}$  ;

c)  $u_n = \frac{10}{2 \cdot 4^n - 3}$  ;

d)  $u_n = \frac{101}{7 \cdot 2^n - 5^n}$  .

4.26. Tìm giới hạn của dãy số  $(u_n)$  với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

4.27. a) Cho một số  $h > 0$ . Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

b) Chứng minh rằng nếu  $q > 1$  thì

$$\lim \frac{q^n}{n} = +\infty.$$

c) Cho  $q > 1$ . Tìm  $\lim \frac{n}{q^n}$ .

*Hướng dẫn.* b) Đặt  $q = 1 + h$  và áp dụng a).

4.28. Chứng minh rằng nếu  $q > 1$  thì  $\lim \frac{n^2}{q^n} = 0$ .

*Hướng dẫn.* Áp dụng bài tập 4.27c).

4.29. Tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim \frac{2n - 3^n}{n + 2^n}$  ;

b)  $\lim (100n - 7 - 2^n)$ .

4.30. Cho hai dãy số  $(u_n)$  và  $(v_n)$ . Chứng minh rằng

a) Nếu  $u_n \leq v_n$  với mọi  $n$  và  $\lim u_n = +\infty$  thì  $\lim v_n = +\infty$ ,

b) Nếu  $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$  và  $\lim |v_n| = +\infty$  thì  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ .

c) Nếu  $\lim u_n = +\infty$  (hoặc  $-\infty$ ) và  $\lim v_n = L \in \mathbb{R}$  thì  $\lim (u_n + v_n) = +\infty$  (hoặc  $-\infty$ ).

4.31. Áp dụng định nghĩa giới hạn của dãy số, tìm các giới hạn sau :

a)  $\lim \left( 10 - \frac{2 \sin n^2}{\sqrt{n}} \right)$  ;

b)  $\lim \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n (\sqrt{3})^n}{3 \cdot 2^{n+1}} \right)$  ;

c)  $\lim \frac{n \sin n^2 - 3n^2}{n^2}$  ;

d)  $\lim \frac{n - 2\sqrt{n}}{2n}$ .

4.32. Tìm các giới hạn sau :

$$a) \lim \frac{n^4 - n^2 \cos 3n - 1}{2n^4 + n^2 - 1} ;$$

$$b) \lim \frac{2n - 11}{n^4 + 3n^3 - n + 2} ;$$

$$c) \lim \frac{n^4 - 2n^2 + n - 20}{2n^2 + n + 7} ;$$

$$d) \lim \frac{\sqrt{2n^2 + n - 2}}{3 - 2n} ;$$

4.33. Tìm giới hạn của dãy số  $(u_n)$  với

$$a) u_n = \frac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4} ;$$

$$b) u_n = \frac{13 \cdot 3^n - 5n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n} .$$

4.34. Tìm các giới hạn sau :

$$a) \lim \left( n \cos \frac{n\pi}{5} - 2n^2 \right) ;$$

$$b) \lim \sqrt{2n^4 - n + 3} ;$$

$$c) \lim \sqrt[3]{100 - 2n^2 - 3n^3} ;$$

$$d) \lim \sqrt{3 \cdot 4^n - n + 2} .$$

4.35. Tìm các giới hạn sau :

$$a) \lim \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) ;$$

$$b) \lim \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}} ;$$

$$c) \lim (2n - 1) \sqrt{\frac{2n + 3}{n^4 - n^2 + 2}} ;$$

$$d) \lim \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5n + 3^{n+1}}} .$$

4.36. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là  $\frac{3}{4}$  và số hạng đầu là một số dương.

4.37. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ 2u_{n+1} = u_n + 1. \end{cases}$$

Gọi  $(v_n)$  là dãy số xác định bởi

$$v_n = u_n - 1 \text{ với mọi } n.$$

a) Chứng minh rằng  $(v_n)$  là một cấp số nhân lùi vô hạn ;

b) Gọi  $S_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu tiên của dãy số  $(u_n)$ . Tìm  $\lim S_n$ .