

§4. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

4.38. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x + 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1)$.

4.39. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin 2x$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos 3x$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{2x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{2}{x}$.

Hướng dẫn. a) Lấy hai dãy số (x_n) và (x'_n) với $x_n = n\pi$, $x'_n = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

Tìm $\lim x_n$, $\lim x'_n$, $\lim f(x_n)$, $\lim f(x'_n)$.

c) Chọn dãy (x_n) sao cho $\frac{1}{2x_n} = n\pi$ hay $x_n = \frac{1}{2n\pi}$. Tìm $\lim x_n$ và $\lim f(x_n)$.

4.40. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

4.41. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$ có thể trừ điểm $x_0 \in (a; b)$. Chứng minh rằng nếu

$$|f(x)| \leq |g(x)| \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}, \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

4.42. Giả sử hàm số f xác định trên một khoảng chứa điểm $x = 0$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

biết rằng

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M \text{ với mọi } x \neq 0 \text{ (} M \text{ là một hằng số)}.$$

4.43. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ nếu

$$1 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 5 \text{ với } 0 < |x - 2| < 1.$$

4.44. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - 4x)^2$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(2x - 1)}{x^4 + x + 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$;

g) $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$;

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - x - 6)^2}{x^3 + 2x^2}$.

4.45. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{1 - 3x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x + 1}{3x^3 + x^2 + 2}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{2x^2 - 3}}$.