C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

1.1. a) (D).

b) (D).

c) (D).

1.2. a) 1 ; 0.

b) 0 ; –1.

c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; –1.

1.3. Kí hiệu một trong hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $y = f(x)$ và hàm số kia là $y = g(x)$. Theo giả thiết thì f và g giữ dấu không đổi trên J.

a) Do $g^2 = 1 - f^2$, nên nếu f^2 đồng biến (nghịch biến) trên J thì g^2 nghịch biến (đồng biến) trên J.

Giả sử $f > 0$ trên J :

– Nếu f đồng biến trên J thì f^2 đồng biến từ đó g^2 nghịch biến ; Vậy khi đó, nếu $g > 0$ thì g nghịch biến, nếu $g < 0$ thì g đồng biến.

– Nếu f nghịch biến trên J thì f^2 nghịch biến từ đó g^2 đồng biến ; Vậy khi đó, nếu $g > 0$ thì g đồng biến, nếu $g < 0$ thì g nghịch biến.

Xét tương tự trong trường hợp $f < 0$ trên J, ta thấy các khẳng định a), của bài toán đều đúng.

b) Chứng minh tương tự câu a)

1.4. a)

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$y = -\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

x	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$y = \cos x - 1$	-2 ↗	-1 ↗	0	↘ -1	↘ -2

b)

x	$-\dfrac{4\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
$y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0

c)

x	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{12}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$2x + \dfrac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$y = -\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

1.5. Nếu $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi x, thì khi $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta được $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + T\right) = 1$. Số U mà $\sin U = 1$ phải có dạng $U = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, k là số nguyên nào đó, nên

$$\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Vậy $T = k2\pi$.

Ngược lại, dễ thấy rằng với mọi số nguyên k thì $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với mọi x.

1.6. a) Giả sử $A\sin(\omega(x+T)+\alpha) = A\sin(\omega x+\alpha)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\omega x + \alpha = u$, ta được $\sin(u+\omega T) = \sin u$, với mọi số thực u. Vậy suy ra $\omega T = k2\pi$, tức là $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k nguyên. Ngược lại dễ thấy rằng

$$A\sin\left(\omega\left(x+k\frac{2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right) = A\sin(\omega x+\alpha+k2\pi) = A\sin(\omega x+\alpha).$$

Vậy số $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$ là số dương bé nhất thoả mãn

$$A\sin(\omega(x+T)+\alpha) = A\sin(\omega x+\alpha) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

(tức là $y = A\sin(\omega x+\alpha)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$).

b) T là số mà $A\cos(\omega(x+T)+\alpha) = A\cos(\omega x+\alpha)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\sin\left(\omega(x+T)+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega x+\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Đặt $\omega x + \alpha + \dfrac{\pi}{2} = u$, ta được $\sin(u+\omega T) = \sin u$ với mọi u, từ đó $\omega T = k2\pi$ tức là $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k là số nguyên.

(*Cách khác*. $A\cos(\omega(x+T)+\alpha) = A\cos(\omega x+\alpha)$ với mọi x, thì khi lấy $x = -\dfrac{\alpha}{\omega}$, ta có $\cos\omega T = \cos 0 = 1$, từ đó $\omega T = k2\pi$, tức $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k là số nguyên).

Từ đó dễ thấy rằng $y = A\cos(\omega x+\alpha)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

1.7. a) $y = \sin^2 2x + 1 = \dfrac{1-\cos 4x}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 4x$. Từ bài tập 1.6 b) dễ thấy hàm số này là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ Đó là một hàm số chẵn.

b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, đó là một hàm số tuần hoàn với chu kì π. Nó là một hàm số chẵn.

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, với mọi x nên y là một hàm hằng, do đó với mọi số T ta có $\cos^2(x + T) + \sin^2(x + T) = \cos^2 x + \sin^2 x$ với mọi x, đó là một hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kì (trong các số T dương không có số T nhỏ nhất). Hàm hằng là một hàm số chẵn.

1.8. T là số thoả mãn $\forall x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + T) = \tan x$.

Với $x = 0$ ta được $\tan T = \tan 0 = 0$, suy ra $T = k\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k\pi$ thoả mãn $\forall x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + T) = \tan x$. Trong các số $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ số dương nhỏ nhất là π. Vậy hàm số $y = \tan x$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.9. a) Hàm số $y = A\tan\omega x + B$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2\omega} + k\frac{\pi}{\omega} \mid k \in \mathbb{R}\}$. Cần tìm T để $\forall x \in \mathcal{D}$, $x + T$ và $x - T$ đều thuộc $\mathcal{D}$ và $A\tan\omega(x + T) + B = A\tan\omega x + B$, tức là $\tan(\omega x + \omega T) = \tan\omega x$. Rõ ràng $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \omega x = u \in \mathcal{D}_1$ nên $\tan(u + \omega T) = \tan u$ với mọi $u \in \mathcal{D}_1$ khi và chỉ khi $\omega T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó $T = k\frac{\pi}{\omega}$ và số T dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{\pi}{|\omega|}$.

b) Với mọi $x \in \mathcal{D}_2$, $\cot x = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$, nên $\cot(x + T) = \cot x$, $\forall x \in \mathcal{D}_2$ tương đương với $\tan(u + T) = \tan u$, $\forall u = x + \frac{\pi}{2} \in \mathcal{D}_1$. Từ đó $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy số T dương nhỏ nhất cần tìm là π.

1.10. a) $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm số xác định trên $\mathcal{D}_2$. Cần tìm số T thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_2$, $x + T \in \mathcal{D}_2$, $x - T \in \mathcal{D}_2$, $\frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x}$. Xét $x = \frac{\pi}{2} \in \mathcal{D}_2$, ta được $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$, từ đó $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức $T = k2\pi$, k là số nguyên.

Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k2\pi$ thoả mãn : $\forall\ x \in \mathcal{D}_2$, $x + T \in \mathcal{D}_2$, $x - T \in \mathcal{D}_2$ và $\dfrac{1}{\sin(x+T)} = \dfrac{1}{\sin x}$. Vậy hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Đó là một hàm số lẻ.

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ là hàm số xác định trên $\mathcal{D}_1$. Cần tìm số T thoả mãn :

$\forall\ x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$, $\dfrac{1}{\cos(x+T)} = \dfrac{1}{\cos x}$. Xét $x = 0 \in \mathcal{D}_1$, ta được $\cos T = 1$, từ đó $T = k2\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k2\pi$ thoả mãn các điều kiện đề ra. Vậy hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Đó là một hàm số chẵn.

c) $y = \tan^2 x$, cần tìm số T thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$, $\tan^2(x + T) = \tan^2 x$. Xét $x = 0 \in \mathcal{D}_1$, ta được $\tan^2 T = 0$, từ đó $\tan T = 0$, suy ra $\tan T = k\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k\pi$ thoả mãn :

$\forall\ x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan^2(x + T) = \tan^2(x + k\pi) = \tan^2 x$. Vậy hàm số $y = \tan^2 x$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.11. a) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin u$ là 1 và -1, nên dễ thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ là $|A| + B$ và $-|A| + B$.

b) Khi $A > 0$, hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ đạt giá trị lớn nhất tại x mà $\omega x + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là $x = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + k\dfrac{2\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.12. a) Hàm số $y = b\sin\dfrac{\pi}{a}x$ nên $A = b$, $\omega = \dfrac{\pi}{a}\cdot$

b) Hàm số là $y = -b\sin\dfrac{\pi}{2a}x$ nên $A = -b$, $\omega = \dfrac{\pi}{2a}\cdot$

1.13. Hàm số $y = A\sin(x + \alpha) + B$ đạt giá trị lớn nhất là 3 tại $x = \frac{\pi}{6}$ (coi $A > 0$) nên :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1\,, \\ A+B=3\,. \end{cases}$$

Hàm số $y = A\sin(x + \alpha) + B$ đạt giá trị nhỏ nhất là -1 tại $x = -\frac{5\pi}{6}$ nên :

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=-1\,, \\ -A+B=-1\,. \end{cases}$$

Từ đó $B = 1$, $A = 2$ và chú ý rằng

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha-\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right),$$

nên chỉ cần chọn α sao cho $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1$, chẳng hạn $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Vậy $A = 2$, $B = 1$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

1.14. a) Vì $(a\,;\,b) \subset \mathcal{D}_1$ nên không có số $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ thuộc $(a\,;\,b)$. Vậy có số nguyên l để $(a\,;\,b) \subset \left(\frac{\pi}{2} + l\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + (l+1)\pi\right)$; hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng này nên nó đồng biến trên khoảng $(a\,;\,b)$.

b) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$, nhưng khoảng này không nằm trong tập xác định $\mathcal{D}_2$ của hàm số $y = \cot x$ nên không thể xét tính nghịch biến của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng đó. (Nếu cả hai hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ cùng xác định trên khoảng J thì dễ thấy $y = \tan x$ đồng biến trên J và hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên J).

1.15. a) Điểm $M'(x' ; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua điểm $(k\pi ; 0)$ khi và chỉ khi

$$\frac{x + x'}{2} = k\pi , \frac{y + y'}{2} = 0 \text{, tức là } \begin{cases} x' = -x + k2\pi \\ y' = y. \end{cases}$$

Gọi C là đồ thị của hàm số $y = \sin x$. C nhận $(k\pi ; 0)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x ; y)$ thuộc C (tức là với mọi x, $y = \sin x$) điểm $M'(x' ; y')$ nói trên (tức là $x' = -x + k2\pi$, $y' = -y$) cũng thuộc C ; Điều này có nghĩa là $-\sin x = \sin(-x + k2\pi)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng $\sin x = \sin(x - k2\pi)$ do 2π

là chu kì của hàm số $y = \sin x$. Vậy điểm $(k\pi ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ là một tâm đối xứng của

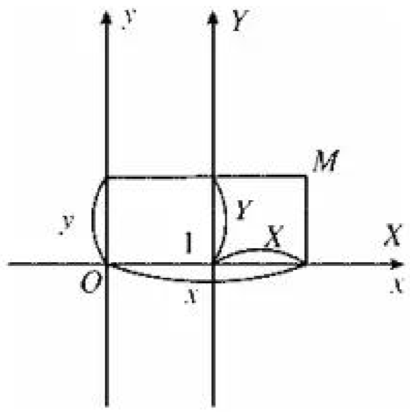
đồ thị C của hàm số $y = \sin x$.

Cách chứng minh khác

Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I(k\pi ; 0)$; $x = X + k\pi$; $y = Y$ (phép đổi gốc tọa độ), (h. 1.6) thì đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là đồ thị của hàm số

$$Y = \sin(X + k\pi) = (-1)^k \sin X,$$

trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \sin X$ cũng như hàm số $Y = -\sin X$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I là tâm đối xứng.



Hình 1.6

b) Điểm $M'(x' ; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua điểm $\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$

khi và chỉ khi

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{k\pi}{2}, \ \frac{y + y'}{2} = 0 \text{, tức là } \begin{cases} x' = -x + k\pi \\ y' = -y. \end{cases}$$

Gọi C là đồ thị của hàm số $y = \tan x$; C nhận $\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$ làm tâm đối xứng khi

và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x ; y)$ thuộc C (tức là với mọi $x \in \mathcal{D}_1$, $y = \tan x$) điểm $M'(x' ; y')$ nói trên (tức là $x' = -x + k\pi$, $y' = -y$) cũng thuộc C ; điều này có nghĩa là $-\tan x = \tan(-x + k\pi)$, với mọi $x \in \mathcal{D}_1$. Điều đó đúng do π là chu kì của hàm số $y = \tan x$. Vậy điểm $\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ là một tâm đối xứng của đồ thị $\mathcal{C}$ của hàm số $y = \tan x$.

Cách chứng minh khác

Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$; $x = X + \frac{k\pi}{2}$; $y = Y$. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là đồ thị của hàm số

$$Y = \tan(X + k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \tan X & \text{nếu } k \text{ chẵn,} \\ -\dfrac{1}{\tan X} & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

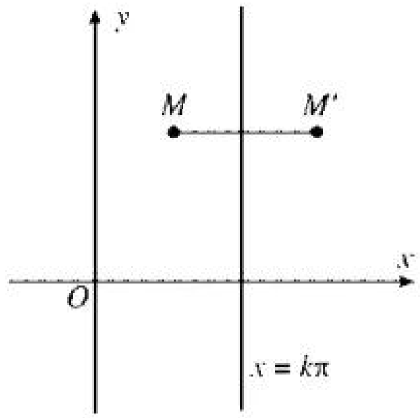
trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \tan X$ cũng như hàm số $Y = -\dfrac{1}{\tan X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I là tâm đối xứng.

c) Điểm $M'(x' ; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua đường thẳng $x = k\pi$ (h.1.7) khi và chỉ khi $\dfrac{x + x'}{2} = k\pi$, $y = y'$, tức là $\begin{cases} x' = -x + k2\pi \\ y' = y. \end{cases}$

Gọi $\mathcal{C}$ là đồ thị của hàm số $y = \cos x$. $\mathcal{C}$ nhận đường thẳng $x = k\pi$ làm một trục đối xứng khi và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x ; y)$ thuộc $\mathcal{C}$ (tức là với mọi x, $y = \cos x$) điểm $M'(x' ; y')$ nói trên cũng thuộc $\mathcal{C}$. Điều này có nghĩa là

$$\cos x = \cos(-x + k2\pi), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng ta có đẳng thức đó, do 2π là chu kì của hàm số $y = \cos x$. Vậy đường thẳng $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là một trục đối xứng của đồ thị $\mathcal{C}$ của hàm số $y = \cos x$.



Hình 1.7

Cách chứng minh khác

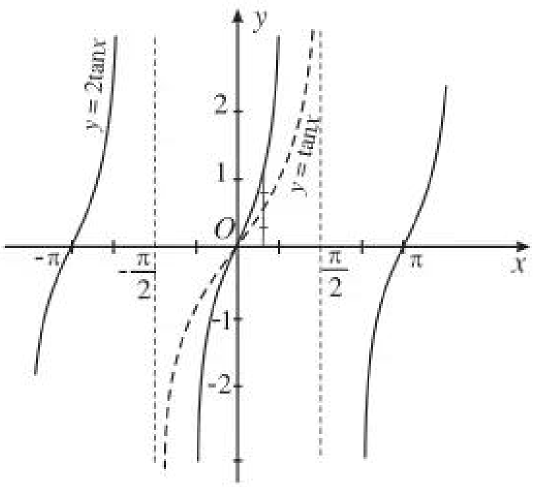
Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I(k\pi ; 0)$; $x = X + k\pi$; $y = Y$, thì đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là đồ thị của hàm số $Y = \cos(X + k\pi) = (-1)^k \cos X$ trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \cos X$ cũng như hàm số $Y = -\cos X$ là các hàm số chẵn nên đồ thị đó nhận trục IY (tức là đường thẳng $x = k\pi$) làm trục đối xứng.

1.16. Gọi C là đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

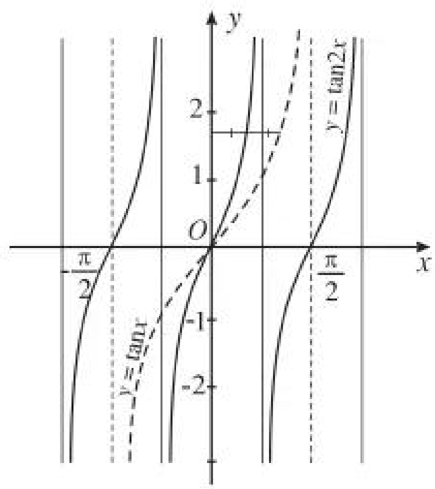
a) Đồ thị của hàm số $y = 2\tan x$ có được từ C bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x\ ;\ y)$ thành điểm $(x\ ;\ 2y)$. (h.1.8).

b) Đồ thị của hàm số $y = \tan 2x$ có được bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x\ ;\ y)$ thành điểm $(\frac{x}{2}\ ;\ y)$. (h.1.9).

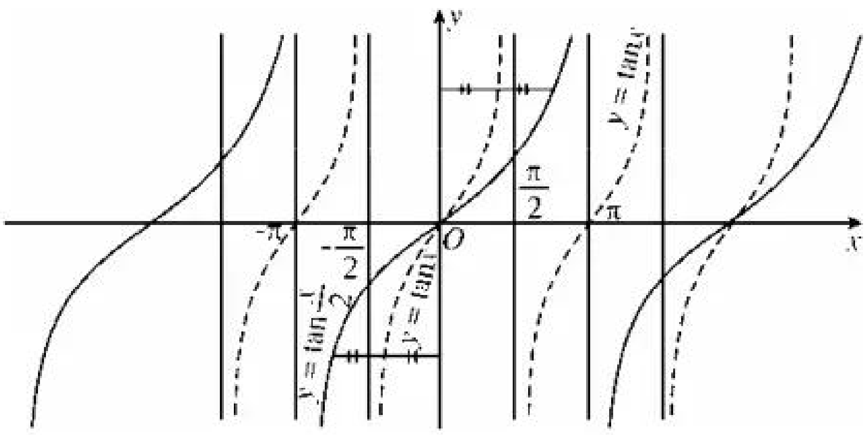
c) Đồ thị của hàm số $y = \tan\frac{x}{2}$ có được bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x\ ;\ y)$ thành điểm $(2x\ ;\ y)$, (h.1.10).



Hình 1.8



Hình 1.9



Hình 1.10

1.17. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\ ;\ 1\right)$ biến điểm $(x\ ;\ y)$ thành điểm $(x'\ ;\ y')$

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{\pi}{4}, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Từ đó nó biến đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thành đồ thị của hàm số $y = f\left(x' - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Vậy ta có :

a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$;

b) $y = \sin 2x$, (do $\cos 2(x - \frac{\pi}{4}) = \sin 2x$) ;

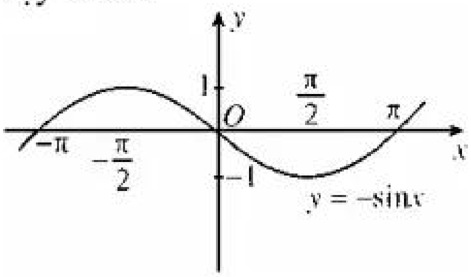
c) $y = 2\sin x + 1$; d) $y = \cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

1.18. Điểm đối xứng của điểm $M(x\ ;\ y)$ qua điểm $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ là điểm $M'(x'\ ;\ y')$, $x' = \pi - x\ ;\ y' = -y$ tức là $x = \pi - x'\ ;\ y = -y'$. Vậy ta có :

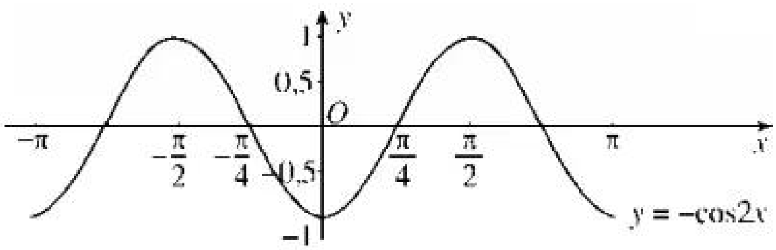
a) $y = -\sin x$ (h.1.11) ;

b) $y = -\cos 2x$ (h.1.12) ;

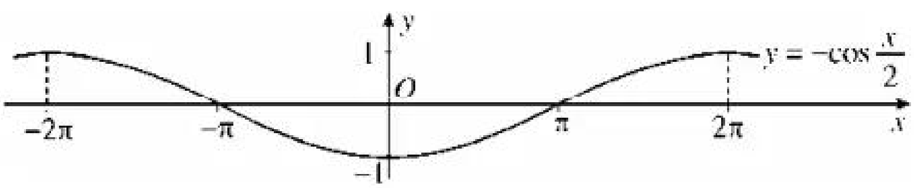
c) $y = -\cos\frac{x}{2}$ (h.1.13).



Hình 1.11



Hình 1.12



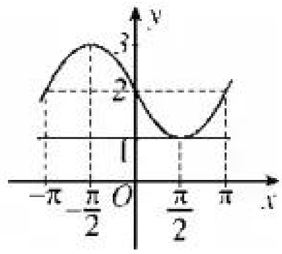
Hình 1.13

1.19. Điểm đối xứng của điểm $M(x\ ;\ y)$ qua đường thẳng $y = 1$ là điểm $M'\ (x'\ ;\ y')$: $x' = x$, $y' = 2 - y$, tức là $x = x'$; $y = 2 - y'$. Vậy ta có :

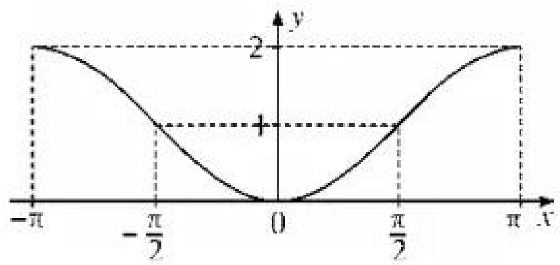
a) $y = 2 - \sin x$ (h.1.14) ;

b) $y = 1 - \cos x$ (h.1.15) ;

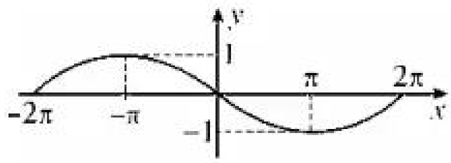
c) $y = -\sin\dfrac{x}{2}$ (h.1.16).



Hình 1.14



Hình 1.15



Hình 1.16

1.20. a) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$; $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

b) $x = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

c) $x = \dfrac{9\pi}{40} + k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{40} + l\pi$.

d) $x = 55^{\circ} + k120^{\circ}$; $x = -45^{\circ} + k120^{\circ}$.

e) $x = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}$.

f) $x = -15^{\circ} + k180^{\circ}$.

1.21. a) $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5}$; $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin 3x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

b) $x = -\dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos3x \Leftrightarrow \cos3x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

c) $x = \dfrac{25\pi}{72} + \dfrac{k\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin(3x-\frac{5\pi}{6}) + \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x-\frac{5\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4}-3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(3x-\frac{13\pi}{24}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{13\pi}{24}\right) = 0.$$

d) $x = 84^{\circ} + k144^{\circ}$; $x = 140^{\circ} + k240^{\circ}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\cos\frac{x}{2} = -\cos(2x-30^{\circ}) \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} + \cos(2x-30^{\circ}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{5x}{4} - 15^{\circ})\cos(15^{\circ} - \frac{3x}{4}) = 0.$$

1.22. Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{17\pi}{140} + k\frac{2\pi}{7} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{20} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

Giải

Ta có $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40}\right) = 0.$

• $\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{140} + k\frac{2\pi}{7}$;

• $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{20} + k2\pi$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\cos(4x+\frac{2\pi}{5}) + \cos(3x-\frac{\pi}{4}) \neq 0$, tức là

$$x \neq \frac{17\pi}{140} + k\frac{2\pi}{7} \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ và } x \neq \frac{7\pi}{20} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

1.23. a) $x \approx -0,06$.

Giải. Nếu đặt $y = 2x + \frac{\pi}{6}$ thì $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ và ta có phương trình (với ẩn y) $\sin y = \frac{2}{5}$. Ta biết rằng với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, phương trình này có một nghiệm duy nhất là $y = \arcsin\frac{2}{5}$. Vậy, với điều kiện $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $2x + \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{2}{5}$, và do đó nó cũng có một nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{2}{5} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Lấy giá trị gần đúng $\arcsin\frac{2}{5} \approx 0,412$ và $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$, ta được $x \approx -0,06$.

(*Chú ý*. Muốn tính gần đúng kết quả cuối cùng chính xác đến hàng phần trăm thì trong các kết quả trung gian ta phải tính chính xác đến hàng phần nghìn).

b) $x \approx 10,41$.

Giải. Nếu đặt $y = \frac{x}{2}$ thì $2\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow \pi < y < 2\pi$ và ta có phương trình $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Do $0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ nên phương trình $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ có duy nhất một nghiệm $y = \alpha$ thuộc khoảng $(\pi ; 2\pi)$ (có thể thấy rõ điều này trên đường tròn lượng giác). Vậy trong khoảng $(2\pi ; 4\pi)$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\frac{x}{2} = \alpha$, và do đó nó có một nghiệm duy nhất $x = 2\alpha$. Để tính giá trị gần đúng của α, ta làm như sau :

Dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta tìm được số β thoả mãn $0 < \beta < \pi$ và $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (cụ thể là $\beta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 1,080$). Khi đó, dễ thấy số $2\pi - \beta$ thoả mãn $\pi < 2\pi - \beta < 2\pi$ và $\cos(2\pi - \beta) = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, nghĩa là $\alpha = 2\pi - \beta$.

Vì $\beta \approx 1,080$ nên giá trị gần đúng nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2\alpha \approx 10,41$.

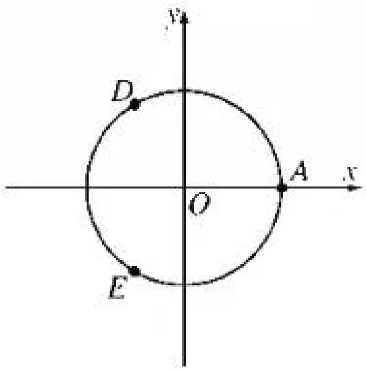
c) $x \approx -1,03$.

Giải. Đặt $y = \dfrac{3x - \pi}{5}$. Khi đó $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ và phương trình đã cho có dạng tan$y = -3$. Với điều kiện $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, phương trình này có một nghiệm duy nhất là $y = \arctan(-3)$. Vì $\dfrac{3x - \pi}{5} = \arctan(-3)$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\left(5\arctan(-3) + \pi\right)$ nên $x = \dfrac{1}{3}\left(5\arctan(-3) + \pi\right)$ cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{6}$.

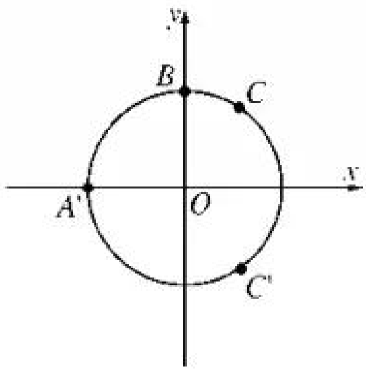
Lấy giá trị gần đúng $\arctan(-3) \approx -1,249$, ta được $x \approx -1,03$.

1.24. a) Nghiệm là $x = \dfrac{k2\pi}{3}$, chúng được biểu diễn bởi ba điểm A, D, E trên hình 1.17.

b) Nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}$, chúng được biểu diễn bởi bốn điểm B, C, A', C' trên hình 1.18.



Hình 1.17



Hình 1.18

1.25. a) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho thành $3(1 - \cos^2 2x) + 7\cos 2x - 3 = 0$.

b) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \alpha + 2k\pi$, $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, trong đó $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho thành $6(1-\sin^2 x)+5\sin x-7=0$.

c) $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\pi+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

d) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$.

e) Vô nghiệm.

Giải. Ta có $2\sin^2 3x=1-\cos 6x$ và $\cos 12x=2\cos^2 6x-1$. Do đó

$$6\sin^2 3x+\cos 12x=14 \Leftrightarrow 3(1-\cos 6x)+2\cos^2 6x-1=14$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 6x-3\cos 6x-12=0 \Leftrightarrow \cos 6x=\frac{3\pm\sqrt{105}}{4}.$$

Dễ thấy $\left|\dfrac{3\pm\sqrt{105}}{4}\right|>1$ nên các phương trình này vô nghiệm, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

f) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\sin^4 x=(1-\cos^2 x)^2$ để đưa phương trình đã cho về dạng phương trình trùng phương đối với $\cos x$.

1.26. a) $x=\dfrac{2\pi}{15}+k\pi$, $x=-\dfrac{8\pi}{15}+k\pi$.

b) $x=\dfrac{7\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2}$.

c) $x=\alpha+k\pi$, trong đó $\tan\alpha=2$ và $x=\beta+k\pi$, trong đó $\tan\beta=-\dfrac{2}{7}$.

d) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

1.27. Bằng cách đưa biểu thức $a\sin x+b\cos x$ về dạng $C\sin(x+\alpha)$ dễ thấy

a) (D) ; b) (C).

1.28. a) Ta có $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, nên giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, giá trị nhỏ nhất là $-2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

b) Ta có $y = (\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 3\sin x\cos x = 1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$.

Để ý rằng $\sqrt{\dfrac{1}{4}+4}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$, ta thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ và $1-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

c) Ta có $y = (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x) - 1 = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) - 3\sin x\cos x - 1$

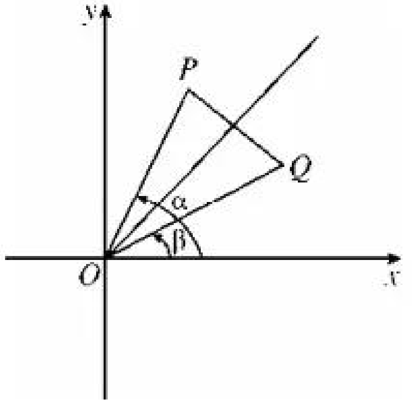
$$= -1 - \frac{3}{2}\sin 2x - 2\cos 2x.$$

Để ý rằng $\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=\dfrac{5}{2}$, ta thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $\dfrac{3}{2}$ và $-\dfrac{7}{2}$.

1.29. a) Ta có $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OM} = a\sin x + b\cos x$

$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\left(OQ, OM\right) = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos((OA, OM) - (OA, OQ))$

$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos(x - \beta)$, $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\beta = (OA, OQ)$.



Hình 1.19

b) (h.1.19) Hai điểm $P(a\ ;\ b)$ và $Q(b\ ;\ a)$ đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ, nên dễ thấy

$(OA, OQ) = \dfrac{\pi}{2} - (OA, OP)$, tức là

$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy

$a\sin x + b\cos x = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos(x-\beta) = \left|\overrightarrow{OP}\right|\cos(x - \dfrac{\pi}{2} + \alpha) = \left|\overrightarrow{OP}\right|\sin(x+\alpha)$.

1.30. a) Từ $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, ta dễ tính được $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ nên

$$\sin x + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right).$$

b) $C \approx 3{,}236067978$, $\alpha \approx 1{,}256637061\ldots$.

1.31. a) Ta có $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ nên dễ thấy hàm số y nhận mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $[-\sqrt{a^2+b^2}\,;\sqrt{a^2+b^2}\,]$.

b) Do $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ nên $\sin x - \cos x + 3 \neq 0$ với mọi x. Vậy cặp số (x, y) thoả mãn $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$ khi và chỉ khi :

$$(y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -(3y+1).$$

Với mọi giá trị y cho trước, biểu thức ở vế trái của đẳng thức này lấy mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $\left[-\sqrt{(y-1)^2+(y+1)^2}\,;\sqrt{(y-1)^2+(y+1)^2}\right]$. Đẳng thức trên cho thấy $-(3y+1)$ phải thuộc đoạn đó, tức là :

$$(3y+1)^2 \leq (y-1)^2 + (y+1)^2.$$

Vậy với mọi y thoả mãn điều kiện này, tồn tại x để

$$(y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -(3y+1).$$

Để ý rằng bất đẳng thức trên tương đương với

$$7y^2 + 6y - 1 \leq 0 \text{ tức là } -1 \leq y \leq \frac{1}{7}.$$

Từ đó ta suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $\frac{1}{7}$ và -1.

c) $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$.

Để ý rằng $|2\cos x - \sin x| \leq \sqrt{5}$, nên $2\cos x - \sin x + 4 \neq 0$ với mọi x. Vậy (x, y) thoả mãn đẳng thức trên khi và chỉ khi $(y+2)\sin x + (1-2y)\cos x = 4y - 3$.

Lập luận tương tự như câu b), hàm số y lấy mọi giá trị sao cho

$$(4y-3)^2 \leq (y+2)^2 + (1-2y)^2.$$

Bất đẳng thức tương đương với $11y^2 - 24y + 4 \leq 0$ tức là $\frac{2}{11} \leq y \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là 2 và $\frac{2}{11}$.

1.32. a) $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$, với α thoả mãn $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

b) $x = \alpha \pm \beta + k2\pi$ trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$, $\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{1}{7}}$ và $\cos\beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$.

Giải. $3^2 + (2\sqrt{3})^2 = 21$. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{21}$, ta được phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{21}}\cos x + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}\sin x = \frac{9}{2\sqrt{21}}.$$

Hiển nhiên có thể chọn được α sao cho $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$ và $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{1}{7}}$,

và chọn được β sao cho $\cos\beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $\cos(x - \alpha) = \cos\beta$; nó có các nghiệm $x = \alpha \pm \beta + k2\pi$, đó cũng là các nghiệm của phương trình đã cho.

c) $x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Hướng dẫn. Chia hai vế cho $\sqrt{13}$; chọn α thoả mãn $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Bài toán dẫn đến phương trình $\sin(2x + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

d) $x = \frac{\alpha}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $x = \frac{\pi - \alpha}{16} + k\frac{\pi}{8}$, trong đó $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn. Phương trình được viết thành $\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x = \sin 14x$ hay $\sin(2x + \alpha) = \sin 14x$.

1.33. $x = \frac{\pi}{4}$.

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$(\sin x - \cos x)m^2 + (\cos^2 x - \sin^2 x)m + (\sin x - \cos x) = 0$.

Để đẳng thức này đúng với mọi m thì ta phải có $\begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \end{cases}$

tức là

$$\sin x - \cos x = 0 \qquad (*).$$

Trong khoảng $(-\frac{3\pi}{4}; \pi)$ có đúng một giá trị $x = \frac{\pi}{4}$ thoả mãn (*).

Kết luận. Trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ có đúng một giá trị $x = \frac{\pi}{4}$ thoả mãn phương trình đã cho với mọi $m \in \mathbb{R}$.

1.34. a) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Giải. $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi (bằng cách thế $x = 1$ vào phương trình) ta có đẳng thức $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 2$ hay $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = 1$. Đẳng thức đó xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ hay $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

b) Không có số α nào thoả mãn điều kiện của bài toán.

1.35. $x = \alpha + \pi + k2\pi$, $x = \alpha \pm \arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k2\pi$, trong đó $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ và $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Giải. Đặt $y = 12\cos x + 5\sin x + 14$, ta có phương trình $y + \frac{5}{y} - 6 = 0$. Dễ thấy phương trình này có hai nghiệm là $y = 1$ và $y = 5$. Do đó

$12\cos x + 5\sin x + \frac{5}{12\cos x + 5\sin x + 14} + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12\cos x+5\sin x+14=1\\12\cos x+5\sin x+14=5\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}12\cos x+5\sin x=-13 & (1)\\12\cos x+5\sin x=-9. & (2)\end{array}\right.$$

Chia hai vế của các phương trình (1) và (2) cho $13\left(13=\sqrt{12^2+5^2}\right)$, gọi α là số thoả mãn $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ và $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, ta có :

(1) $\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=-1 \Leftrightarrow x-\alpha=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\alpha+\pi+k2\pi.$

(2) $\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=-\dfrac{9}{13} \Leftrightarrow x=\alpha\pm\arccos\left(-\dfrac{9}{13}\right)+k2\pi$.

1.36. a) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\alpha+k\pi$, trong đó $\tan\alpha=3$.

Hướng dẫn. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x$ (với $\cos x\neq 0$), ta được phương trình $\tan^2x-2\tan x-3=0$.

b) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\alpha+k\pi$, trong đó $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn. Viết lại vế phải của phương trình là $2=2(\sin^2x+\cos^2x)$.

c) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Hướng dẫn.

Cách 1 : Sử dụng công thức $\sin2x=2\sin x\cos x$ và $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$ để đưa về phương trình $2\cos^2x-2\sin x\cos x=0$ hay $\cos x(\cos x-\sin x)=0$.

Cách 2 : Dùng công thức $2\sin^2x=1-\cos2x$ để đi đến phương trình

$$\sin2x+\cos2x-1=2\cos2x \text{ hay } \sin2x-\cos2x=1.$$

d) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ và $x=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{k\pi}{2}$, trong đó $\cot\alpha=-3$.

Hướng dẫn. Viết lại vế phải của phương trình là $2=2(\sin^22x+\cos^22x)$, rồi đưa phương trình về dạng $\cos^22x+3\sin2x\cos2x=0$

hay $\cos2x(\cos2x+3\sin2x)=0$.

e) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\alpha+k\pi$, trong đó $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn

Chú ý rằng $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ và $\cos(\pi + x) = -\cos x$, ta được phương trình sau tương đương với phương trình đã cho :

$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$, hay $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

1.37. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Giải

Những giá trị của x mà $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$ nên không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của nó cho $\cos^3 x$, ta được

$2\tan^3 x + 4 = 3\tan x\,(1 + \tan^2 x)$. Vậy phương trình đã cho tương đương với

$(\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Do $\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sin\frac{x}{2}$ và $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos\frac{x}{2}$ nên phương trình đã cho có thể viết thành

$$3\sin^3\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2} = 0. \qquad (*)$$

Với điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3\frac{x}{2}$ thì được phương trình

$$3\tan^3\frac{x}{2} + 3\tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} - 1 = 0, \text{ hay } \left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)(3\tan^2\frac{x}{2} - 1) = 0.$$

1.38. Giả sử một góc của tam giác vuông ABC có số đo độ thoả mãn phương trình đã cho. Ta viết phương trình đã cho thành

$$\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - 3\cos^3 x = 0, \ (0^o < x \leq 90^o). \qquad (1)$$

Dễ thấy $x = 90^o$ không phải là nghiệm phương trình, vậy $\cos x \neq 0$ và ta có thể chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$ được :

(1) $\Leftrightarrow \tan^3 x + 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + 3\tan x + 3) = 0$.

Vì phương trình $\tan^2 x + 3\tan x + 3 = 0$ vô nghiệm, nên (1) $\Leftrightarrow$ $\tan x = 1$. Kết hợp với điều kiện $0^o < x < 90^o$ ta thấy chỉ có $x = 45^o$ là thoả mãn. Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân.

1.39. a) $x = \frac{k\pi}{4}$.

Hướng dẫn. $\sin x\sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x)$ và $\sin 3x\sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$.

Chú ý thu gọn hai họ nghiệm thành một.

b) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}$.

Hướng dẫn. $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$ và $\sin 9x\cos 7x = \frac{1}{2}(\sin 16x + \sin 2x)$.

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$.

Hướng dẫn. $\cos x\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$, $\sin 2x\sin 6x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$ và $\sin 4x\sin 6x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 10x)$.

d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{k\pi}{5}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin 4x\sin 5x + \sin 4x\sin 3x - \sin 2x\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\sin 5x + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\sin 5x + \sin 5x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x(\sin 4x + \sin 2x) = 0.$$

1.40. a) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. $\sin 5x + \sin 3x = 2\sin 4x\cos x$.

b) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn. $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x$.

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Giải. Ta biến đổi phương trình đã cho như sau (để ý : $\sin 4x = 4\sin x\cos x\cos 2x$) :

$(\cos x + \cos 3x) + 2\cos(x + 4x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + 2(\cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 2x\cos x + 2\cos 4x\cos x - 8\sin^2 x\cos x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x\,(\cos 2x + \cos 4x - 4\sin^2 x\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x\ [\cos 2x + (2\cos^2 2x - 1) - 2(1 - \cos 2x)\cos 2x] = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x\left(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1\right) = 0$.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

Do $\left|\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}\right| < 1$ nên có các số α và β sao cho $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Từ đó

$\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{8}\ \Leftrightarrow\ 2x = \pm\,\alpha + k2\pi\ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$.

$\cos 2x = \frac{1+\sqrt{17}}{8}\ \Leftrightarrow\ 2x = \pm\,\beta + k2\pi\ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$.

Kết luận. Phương trình đã cho các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{16}$.

Giải. Vế trái phương trình được biến đổi thành :

$(\cos 22x + \cos 10x) + 3(\cos 18x + \cos 14x) = 2\cos 16x\cos 6x + 6\cos 16x\cos 2x$

$= 2\cos 16x\,(\cos 6x + \cos 2x + 2\cos 2x) = 2\cos 16x(2\cos 4x\cos 2x + 2\cos 2x)$

$= 4\cos 16x\cos 2x(\cos 4x + 1) = 8\cos 16x\cos^3 2x.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 16x\cos^3 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 16x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{16}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

1.41. a) $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Hướng dẫn. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với :

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0.$

b) $x = \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \dfrac{k\pi}{9}.$

Hướng dẫn. Dùng công thức hạ bậc rồi rút gọn thì được

$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$ hay $2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x.$

Cuối cùng, cần chú ý thu gọn các họ nghiệm.

c) $x = \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}.$

Hướng dẫn. Dùng công thức hạ bậc rồi rút gọn thì được

$\dfrac{1}{2}(\cos 12x - \cos 4x) + \sin^2 4x = 0.$

Biến đổi tiếp thành $-\sin 8x\sin 4x + \sin^2 4x = 0$ hay $-2\cos 4x\sin^2 4x + \sin^2 4x = 0.$

d) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}.$

e) $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

f) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng các công thức $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ và $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ để biến đổi đưa về phương trình đối với $\cos 2x$.

g) $x = \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Tương tự câu f).

h) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\alpha + k\pi$, trong đó $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Tương tự câu f).

1.42. a) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Vậy với điều kiện $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ và $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$. Có thể thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp. Chẳng hạn, ta có

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}\right) \neq 0.$$

b) $x = -\frac{9\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Áp dụng công thức $\tan a + \cot b = \frac{\cos(a - b)}{\cos a.\sin b}$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cot\left(4x + \frac{7\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(2x + \frac{13\pi}{8}\right)}{\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(4x + \frac{7\pi}{8}\right)} = 0.$$

Do đó, với điều kiện $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \neq 0$ và $\sin\left(4x + \frac{7\pi}{8}\right) \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\cos\left(2x + \frac{13\pi}{8}\right) = 0$. Thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp.

c) $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).\tan\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x}{2}} = 0.$$

Do đó, với điều kiện $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ và $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp.

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$, ta có :

$$\sin 2x + 2\cot x = 3 \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{\tan x} = 3.$$

Giải tiếp phương trình này với điều kiện $\tan x \neq 0$.

1.43. a) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ với điều kiện $\cos x \neq 0$.

b) $x = 45^{o} + k180^{o}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình với điều kiện $\cos(x - 15^{o}) \neq 0$ và $\sin(x + 15^{o}) \neq 0$:

$$\tan(x - 15^{o})\cot(x + 15^{o}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin(x-15^{o})\cos(x+15^{o})}{\cos(x-15^{o})\sin(x+15^{o})} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin 30^{o}}{\sin 2x + \sin 30^{o}} = \frac{1}{3}.$$

c) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$

Hướng dẫn. Phương trình được viết thành :

$\sin 2x + 2(2\cos^2 x - 1) = 1 + \sin x - 4\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (4\cos^2 x - 1) + 4\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x + 1)(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0.$

d) $x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi.$

Hướng dẫn. Quy về giải phương trình trùng phương đối với $\cos x$.

e) $x = \pi + 2k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi.$

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành $(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$.

f) $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi.$

g) $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ x = \dfrac{7\pi}{12} + l\pi.$

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành

$\tan x\,(1 - \sin^2 x) + \cot x\,(1 - \cos^2 x) + \sin 2x = -1.$

1.44. a) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = 2k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$, ta biến đổi phương trình đã cho thành :

$$\cos x\left(\tan\frac{x}{2} - 2\sin x\right) = 0 \text{ hay } \cos x\sin\frac{x}{2}\left(1 - 4\cos^2\frac{x}{2}\right) = 0.$$

b) $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Áp dụng hằng đẳng thức dễ thấy :

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos x + \cos^6 x = 1$$

$\Leftrightarrow\ (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow\ -3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos x = 0.$

c) $x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \sin x\cos x\,(\sin^2 x - \cos^2 x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

d) $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$, $x = \dfrac{7\pi}{30} + k\dfrac{2\pi}{5}$, $x = -\dfrac{\pi}{30} + k\dfrac{2\pi}{5}$, $x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin^2 x + \sin x\cos 4x + \frac{\cos^2 4x}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 4x = \frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow (\sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x)^2 = \dfrac{3}{4}(1 - \cos^2 4x) \Leftrightarrow (\sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x)^2 = \dfrac{3}{4}\sin^2 4x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \\ \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi}{6}\sin 4x - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 4x = \sin x \\ \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 4x + \cos\dfrac{\pi}{6}\sin 4x = \sin(-x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin x \\ \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin(-x). \end{array}\right.$$

1.45. $x = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}95.$

Giải. Ta có $\qquad \cos x + \sin x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3}.$$

Đặt $t = \cos x + \sin x$ với $|\,t\,| \leq \sqrt{2}$. Khi đó $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$ và phương trình trở thành

$$t + \frac{2t}{t^2-1} = \frac{10}{3}. \qquad (1)$$

Với điều kiện $t \neq \pm 1$, ta có :

(1) $\Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t-5) = 0.$

Phương trình này có ba nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = \dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$ và $t_3 = \dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$.

Tuy nhiên, chỉ có $t_3 = \dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$ là thoả mãn điều kiện $|\,t\,| \leq \sqrt{2}$. Do đó phương trình đã cho tương đương với $\cos x + \sin x = \dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$ hay

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Điều kiện $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4}$ tương đương với điều kiện $0 < x - \dfrac{\pi}{4} < \pi$. Với điều kiện đó ta có

(2) $\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}.$

Lấy các giá trị gần đúng $\dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ và $\arccos\dfrac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}160$ ta được $x \approx 2{,}95$.

1.46. $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Xét phương trình $\tan x - \tan\dfrac{x}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ (đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$) và chứng tỏ rằng phương trình đó trên khoảng $(0 ; \pi)$ có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\pi}{3}$.

1.47. *Giải.* Phương trình đã cho có thể viết thành $2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$.

Phương trình này tương đương với $\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = m.\end{array}\right.$

a) Với $m = \dfrac{3}{2}$ thì phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm ; phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ có các nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. Đó cũng là các nghiệm của phương trình đã cho.

b) Do các nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ không thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu $-1 \leq m < 0$.

1.48. $x = k\pi$, $\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ và $\dfrac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Giải

$(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x \quad (1)$

$\Leftrightarrow 4\sin x\sin 2x + 2\sin x - 2\sin 2x - 1 = 3 - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos x + \sin x - 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos x + \sin x - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,[4\sin x\cos x + 1 - 2(\sin x + \cos x)] = 0.$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.
- $4\sin x\cos x + 1 - 2(\sin x + \cos x) = 0. \quad (2)$

Để giải phương trình (2), ta đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó $2\sin x\cos x = t^2 - 1$ và từ phương trình (2) ta có phương trình $2t^2 - 2t - 1 = 0$ với ẩn t. Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Cả hai nghiệm này đều thoả mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = t_1\\ \sin x + \cos x = t_2.\end{array}\right.$

$\sin x + \cos x = t_1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$\sin x + \cos x = t_2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với $\cos\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Kết luận. Phương trình đã cho có các nghiệm $x = k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với α và β là các số thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ và $\cos\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (chẳng hạn, $\alpha = \arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\beta = \arccos\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$).

1.49. $0 < m < 1$.

Giải. Ta có :

$$\cos 6x = \cos(2x + 4x) = \cos 2x\cos 4x - \sin 2x\sin 4x$$
$$= \cos 2x(2\cos^2 2x - 1) - 2\sin^2 2x\cos 2x$$
$$= 2\cos^3 2x - \cos 2x - 2(1 - \cos^2 2x)\cos 2x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x.$$

Áp dụng kết quả đó, phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\cos 4x = \cos^2 3x + m\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{m(1-\cos 2x)}{2}$$

$\Leftrightarrow 2(2\cos^2 2x - 1) = 1 + \cos 6x + m - m\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 2 = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + m - m\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - (m + 3)\cos 2x + m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)[4\cos^2 2x - (m + 3)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1 \\ 4\cos^2 2x = m+3.\end{array}\right.$

Nếu phương trình có nghiệm $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{12}\right)$ thì $2x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{6}\right)$,

suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2x < 1$ và $\frac{3}{4} < \cos^2 2x < 1$, nghĩa là $3 < m + 3 < 4$ hay $0 < m < 1$.

Ngược lại, dễ thấy rằng nếu $0 < m < 1$ thì phương trình có nghiệm $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{12}\right)$.

1.50. a) $x = \frac{4\pi}{3}$

Hướng dẫn. Vì trên khoảng $(0\,;\,2\pi)$, phương trình không xác định với $x = \pi$ nên ta xét phương trình trên từng khoảng $(0\,;\,\pi)$ và $(\pi\,;\,2\pi)$.

– Trên khoảng $(0\,;\,\pi)$ ta có $\sin x > 0$ nên phương trình trở thành $1 = \cos x - \frac{1}{2}$;

– Trên khoảng $(\pi\,;\,2\pi)$ ta có $\sin x < 0$ nên phương trình trở thành $-1 = \cos x - \frac{1}{2}$.

b) $x = \frac{\pi}{16}$, $x = \frac{9\pi}{16}$, $x = \frac{21\pi}{16}$ và $x = \frac{29\pi}{16}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành $\frac{\cos 2x \sin x}{|\sin x|} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, sau đó xét phương trình trên mỗi khoảng $(0\,;\,\pi)$ và $(\pi\,;\,2\pi)$.

1.51. a) (D) ; b) (B).

1.52. Chọn phương án (B) vì hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ và khi tịnh tiến khoảng này sang phải một đoạn dài $10\pi = 5.2\pi$ thì được khoảng $\left(\frac{19\pi}{2}\,;\,10\pi\right)$

1.53. Chọn phương án (D) vì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right)$ và khi tịnh tiến khoảng này sang trái một đoạn dài $6\pi = 3.2\pi$ thì được khoảng $\left(-\frac{11\pi}{2}\,;\,-5\pi\right)$

1.54. Chọn phương án (C) vì $P = \dfrac{2\cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\cos(35^\circ + 5^\circ)} = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$.

1.55. Chọn phương án (B) vì với $x = 290^\circ$, ta có

$\cos\left(\dfrac{x}{2} + 15^\circ\right) = \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$ và $\sin 290^\circ = -\sin 70^\circ = -\cos 20^\circ$.

1.56. Chọn phương án (D).

Hướng dẫn. Viết lại phương trình dưới dạng $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{15}\right)$.

Bằng cách thử vào phương trình, ta thấy chỉ có các số $\dfrac{71\pi}{30}$ và $\dfrac{9\pi}{2}$ là nghiệm đúng phương trình. Tuy nhiên, chúng đều không thuộc khoảng $\left(\dfrac{5\pi}{2}\,;\, 4\pi\right)$ đang xét.

1.57. Chọn phương án (D).

Hướng dẫn. Đặt $y = 4x$ ta có $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < y < 2\pi$. Phương trình đã cho dẫn đến phương trình $\tan^2 y + 3\tan y - 4 = 0$ hay $\left[\begin{array}{l}\tan y = 1\\ \tan y = -4.\end{array}\right.$

Trong khoảng $(0\,;\,2\pi)$, mỗi phương trình $\tan y = 1$ và $\tan y = -4$ đều có hai nghiệm.

1.58. Nếu xét trên khoảng $(0\,;\,2\pi)$ thì cả hai hàm số cùng đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right)$ và cùng nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right)$. Do đó

a) Hai hàm số cùng đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\,;\,2\pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Hai hàm số cùng nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,;\,\pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

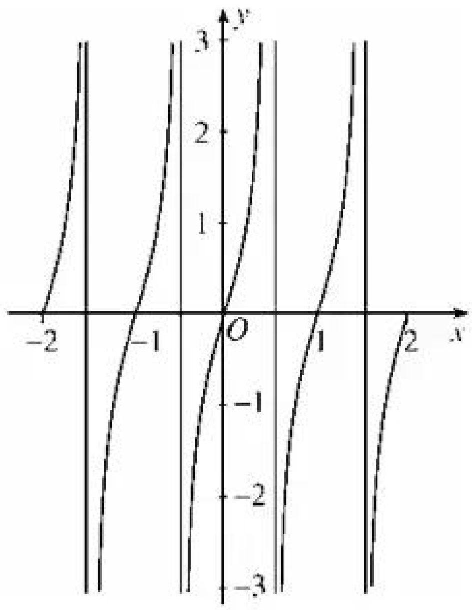
1.59. a) Hàm số $y = \tan(\pi x)$ xác định khi và chỉ khi $\cos(\pi x) \neq 0$. Mặt khác

$$\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó suy ra tập xác định của hàm số $y = \tan(\pi x)$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} + k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Hình 1.20

b) Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$f(x + k) = \tan\left[\pi\left(x + k\right)\right] = \tan(\pi x + k\pi)$$
$$= \tan(\pi x) = f(x).$$

Trong các số nguyên dương, số 1 là nhỏ nhất. Do đó $\tan(\pi x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 1$.

c) Ta thấy

$$-\frac{1}{2} + k < x < \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < \pi x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Từ đó suy ra hàm số $\tan(\pi x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2} + k\,;\, \frac{1}{2} + k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình 1.20.

1.60. Ta có :

$$\cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) = \frac{1 + \cos 2(x - a)}{2} + \frac{1 - \cos 2(x - b)}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2(x - a) - \cos 2(x - b)] = 1 + \sin(2x - a - b)\sin(a - b).$$

Do đó

$$\cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)\sin(a - b)$$
$$= 1 + \sin(2x - a - b)\sin(a - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)\sin(a - b)$$
$$= 1 + \sin(a - b)[\sin(2x - a - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)]$$
$$= 1 + \sin(a - b)[\sin(2x - a - b) - \sin(2x - a - b) - \sin(a - b)]$$
$$= 1 - \sin^2(a - b) = \cos^2(a - b).$$

1.61. a) $x = \frac{41\pi}{126} + k\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{29\pi}{126} + k\frac{2\pi}{3}$.

b) $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

c) $x = 2k\pi$, $x = \pm\alpha + 2k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Quy về phương trình bậc hai đối với $\cos x$.

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \alpha + 2k\pi$, $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ với $\sin\alpha = -\frac{1}{7}$.

Hướng dẫn. Quy về phương trình bậc hai đối với $\sin x$.

e) $x = \pi + 2k\pi$.

f) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Viết lại phương trình như sau :

$3(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x + 2(1 + \sqrt{2})\sin x - 3 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$.

1.62. $x = 0$, $x = \pi \approx 3,14$; $x = 2\pi \approx 6,28$; $x = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$ và $x = \frac{5\pi}{6} \approx 2,62$.

Hướng dẫn. Do $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \cos 2x$ và $\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên phương trình đã cho có thể viết lại thành $\cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$ hay $\sin x - 2\sin^2 x = 0$. Trên đoạn $[0 ; 2\pi]$, phương trình này có các nghiệm $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

1.63. a) $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$; $x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$2\sqrt{2}\sin x\cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2} - 4)\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$.

c) $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \alpha + k\pi$, trong đó $\cot\alpha = -3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$8\sqrt{3}\sin x\cos x + 8\cos^2 x - 4\sin^2 x = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x + 8\sqrt{3}\sin x\cos x - 9\sin^2 x = 0.$$

1.64. a) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin 3x \neq 0$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \sin 2x - \sqrt{2}\cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x - \sqrt{2}\sin 3x\cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) = 0.$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$, trong đó $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Hướng dẫn. Ta có $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ và $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Với điều kiện $\cos 2x \neq -1$, phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\tan^2 x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = 1 - 2\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x(\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0.$$

c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow 9(\sin x - 1) - 6\cos x(\sin x - 1) + 2(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(7 - 6\cos x - 2\sin x) = 0.$$

d) $x = \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos^4 x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 + \sin 2x)^2 = \frac{1}{4} + \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)$.

e) $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow 6\sin x\cos 4x + 4\sin^2 x - 8\sin x + 3\cos 4x + 2\sin x - 4 + 4\cos^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6\sin x\cos 4x + 3\cos 4x - 6\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\cos 4x - 1) = 0$.

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Hướng dẫn. Do $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ nên phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\sqrt{2}\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 = 4\sin x.$$

Với điều kiện $\cos x \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ để đưa về phương trình đối với $\tan x$.

1.65. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin x \neq 0$, ta có

$2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x) = 0$.

Đối với phương trình, $\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0$.

Đặt $t = \sin x - \cos x$ với $|t| \leq \sqrt{2}$.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2m\pi$, với $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos x \neq 0$, ta có

$\tan^2 x(1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin^3 x) - \cos^2 x(1 - \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) - (1 - \sin^2 x)(1 - \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)[(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)\,(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x) = 0$

Đối với phương trình $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$, đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$.

Chú ý rằng tất cả các nghiệm của phương trình $1 - \sin x = 0$ đều không thoả mãn điều kiện $\cos x \neq 0$ nên bị loại.

c) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + l\pi$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, ta có

$$1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x = 1 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x - \cos 2x - \sin 2x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0.$$

Chú ý, loại các giá trị của x không thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

d) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos 2x \neq 0$, ta có

$$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x} \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x \Leftrightarrow 3\sin x - \cos^3 x - 5\sin x\cos^2 x = 0.$$

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^3 x$ ta được một phương trình đối với $\tan x$. Tuy nhiên các nghiệm của phương trình này đều không thoả mãn điều kiện $\cos 2x \neq 0$.

1.66. $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{3\pi}{10}$, $x = \dfrac{7\pi}{6}$ và $x = \dfrac{13\pi}{10}$.

Giải. Điều kiện xác định của phương trình là $\cos x \neq 0$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = 2\sin 2x. \qquad (1)$$

Do $x = \pi$ không là nghiệm của (1) nên ta chỉ cần xét hai khả năng sau :

1) $x \in (0\,;\,\pi)$. Lúc này $0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, kéo theo $\cos\dfrac{x}{2} > 0$ và $\sin\dfrac{x}{2} > 0$. Do đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{4l\pi}{5}. \end{array}\right.$$

Để tìm nghiệm thuộc khoảng $(0 ; \pi)$, ta cần tìm k và l nguyên sao cho

- $0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < k < \frac{5}{8} \Leftrightarrow k = 0$. Ta nhận được $x = \frac{\pi}{6}$.
- $0 < \frac{3\pi}{10} + l\frac{4\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < l < \frac{7}{8} \Leftrightarrow l = 0$. Ta nhận được $x = \frac{3\pi}{10}$.

2) $x \in (\pi ; 2\pi)$. Lúc này $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$, kéo theo $\cos\frac{x}{2} < 0$ và $\sin\frac{x}{2} > 0$. Do đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + l\frac{4\pi}{5}. \end{array}\right.$$

Tương tự trên, ta có

- $\pi < -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{7}{8} < k < \frac{13}{8} \Leftrightarrow k = 1$.

Ta nhận được $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

- $\pi < \frac{\pi}{2} + l\frac{4\pi}{5} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{5}{8} < l < \frac{15}{8} \Leftrightarrow l = 1$.

Ta nhận được $x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$.

Kết luận. Trong khoảng $(0 ; 2\pi)$, phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{10}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ và $x = \frac{13\pi}{10}$.

1.67. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \alpha + l\pi$, với $\tan\alpha = 2$.

Hướng dẫn. Đưa về phương trình bậc hai đối với $\tan x$ bằng cách chia hai vế cho $\cos x$.

b) $m \leq -4$ hoặc $m > 0$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ của phương trình là $\cos x \neq 0$. Với điều kiện đó, chia hai vế cho $\cos x$ và đặt $\tan x = t$ ta được phương trình

$$mt^2 - mt - 1 = 0. \qquad (1)$$

Do phương trình $\tan x = t$ có nghiệm với mọi t nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm.