C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

3.1. Ta sẽ chứng minh

$$1.2 + 2.5 + ... + n.(3n - 1) = n^2(n + 1) \quad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $1.2 = 2 = 1^2.(1 + 1)$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là giả sử đã có

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) = k^2(k + 1),$$

ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) + (k + 1)(3k + 2) = (k + 1)^2.(k + 2).$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) + (k + 1)(3k + 2) = k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2)$$

$$= (k + 1)(k^2 + 3k + 2)$$

$$= (k + 1)(k + 1)(k + 2) = (k + 1)^2.(k + 2).$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, vì $x \neq k2\pi$ (theo giả thiết) nên $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{(1+1)x}{2}\cos\frac{1.x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}+\cos(k+1)x.\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}-2\sin^2\frac{(k+1)x}{2}.\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\left(\cos\frac{kx}{2}-2\sin\frac{(k+1)x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\left(\cos\frac{kx}{2}+\cos\frac{(k+2)x}{2}-\cos\frac{kx}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+3)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+2)x}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3. a) Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1 \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$

Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1,$$

ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}$$

$$>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1 \quad \text{(theo giả thiết quy nạp).}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6} \;\; ... \;\; \frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}} \qquad (2)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}=\frac{3}{8}<\frac{1}{\sqrt{3.1+4}} \quad (\text{vì } 9.7 = 63 < 64 = 8^2).$$

Như vậy, (2) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (2) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{2k+3}{2k+4} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}\cdot\frac{2k+3}{2k+4} \qquad (3)$$

Lại có : $(2k + 3)^2.(3k + 7) < (2k + 3)^2.(3k + 7) + k + 1 = (3k + 4)(2k + 4)^2$.

Do đó : $$\frac{1}{\sqrt{3k+4}}\cdot\frac{2k+3}{2k+4} < \frac{1}{\sqrt{3k+7}}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{2k+3}{2k+4} < \frac{1}{\sqrt{3k+7}},$$

nghĩa là ta cũng có (2) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.4. a) Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$n(2n^2 - 3n + 1) \,\vdots\, 6 \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, ta có $n(2n^2 - 3n + 1) = 0$. Hiển nhiên $0 \,\vdots\, 6$, và vì thế (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $k(2k^2 - 3k + 1) \,\vdots\, 6$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, do $(k + 1)[2(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1] = k(2k^2 - 3k + 1) + 6k^2$ nên từ giả thiết quy nạp suy ra $(k + 1)[2(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1] \,\vdots\, 6$, nghĩa là (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Ta sẽ chứng minh

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} \,\vdots\, 133 \qquad (2)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12 = 133$. Vì thế (2) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (2) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, ta có

$$11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} = 11.\,(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 12^{2k-1}.\,(12^2 - 11)$$

$$= 11.\,(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133.\,12^{2k-1}. \quad (3)$$

Mà $11^{k+1} + 12^{2k-1} \vdots 133$ (theo giả thiết quy nạp) nên từ (3) suy ra

$$11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} \vdots 133,$$

nghĩa là (2) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.5. Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Kí hiệu bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài bởi (1).

Với $n = 1$, theo giả thiết của bài toán ta có $x_1 = 1$. Vì thế, ta có (1) đúng khi $n = 1$.

Với $n = 2$, xét hai số thực dương tuỳ ý x_1, x_2 thoả mãn điều kiện

$$x_1x_2 = 1. \quad (2)$$

Hiển nhiên, trong hai số x_1, x_2 phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tổng quát, giả sử $x_1 \leq 1$ và $x_2 \geq 1$. Khi đó, ta có

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0.$$

Suy ra $x_1 + x_2 \geq 1 + x_1x_2 \geq 2$ (do (2)). Điều này chứng tỏ (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 2$, tức là giả sử với k số thực dương tuỳ ý $x_1, x_2, \ldots, x_k$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2\ldots x_k = 1$ ta luôn có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k.$$

Xét $k + 1$ số thực dương tuỳ ý $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ thoả mãn điều kiện

$$x_1x_2\ldots x_kx_{k+1} = 1.$$

Vì k số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_kx_{k+1}$ có tích bằng 1 nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \geq k. \quad (3)$$

Hơn nữa, dễ thấy trong $k + 1$ số $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tổng quát, giả sử $x_k \le 1$ và $x_{k+1} \ge 1$. Khi đó, ta có

$$(1 - x_k)(x_{k+1} - 1) \ge 0 \text{ hay } x_k + x_{k+1} \ge 1 + x_k x_{k+1}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \ge x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \ge k + 1.$$

Như thế, ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra ta có (1) đúng với n là một số nguyên dương tuỳ ý.

3.6. a) Ta sẽ chứng minh

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (1)$$

với mọi $n \ge 2$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, hiển nhiên ta có $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$. Vì thế, (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \ge 2$. Khi đó, ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \quad (2)$$

Mà $\sqrt{k} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ (dễ thấy), nên từ (2) suy ra

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1},$$

nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \ge 2$.

b) *Hướng dẫn*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.7. Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Kí hiệu bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài bởi (1).

Với $n = 2$, xét hai số thực tuỳ ý $a_1, a_2 \in (0 ; 1)$ ta có

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2 > 1 - a_1 - a_2 \ (\text{do } a_1 a_2 > 0).$$

Như thế, (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 2$.

Xét $k + 1$ số thực tuỳ ý $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ thuộc khoảng $(0 ; 1)$.

Vì k số $a_1, a_2, \ldots, a_k$ thuộc khoảng $(0 ; 1)$ nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k) > 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k.$$

Từ đó, vì $1 - a_{k+1} > 0$, suy ra

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k)(1 - a_{k+1}) > (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k)(1 - a_{k+1}). \quad (2)$$

Lại có

$$(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k)(1 - a_{k+1})$$
$$= 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1} + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)a_{k+1}$$
$$> 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k)(1 - a_{k+1}) > 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1}.$$

Như vậy, (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài.

3.8. Học sinh tự giải.

3.9. Học sinh tự giải.

3.10. Vì A_n nằm trên đường thẳng $x = n$ nên hoành độ của nó bằng n. Vì A_n nằm trên đồ thị $(\mathscr{C})$ nên tung độ u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = \frac{2n-1}{2n^2+1}.$$

3.11. Học sinh tự giải.

3.12. *Giải*. a) Ta có : $u_{n+1} = 5.4^n + 3 = 4.5.4^{n-1} + 3$

$$= 4.(5.4^{n-1} + 3) - 9 = 4u_n - 9 \ (\forall n \geq 1).$$

b) Theo công thức xác định u_n, ta có $u_1 = 5.4^{1-1} + 3 = 8$. Vì thế, kết hợp với kết quả của phần a) suy ra ta có thể cho dãy số (u_n) bởi

$$u_1 = 8 \text{ và } u_{n+1} = 4u_n - 9 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

3.13. a) *Giải*. Ta có : $u_{n+1} = n + 1 = 2n - n + 1 = 2u_n - n + 1 \ (\forall n \geq 1)$;

$$v_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1 = 2.(2^n + n) - n + 1 = 2v_n - n + 1 \ (\forall n \geq 1).$$

b) Học sinh tự rút ra nhận xét.

3.14. *Hướng dẫn*

• Phương trình của đường thẳng $\Delta : y = x$.

• Với mỗi $n \geq 1$, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là tung độ của điểm A_n và điểm B_n. Khi đó :

– Do A_n nằm trên $(\mathscr{C})$ nên $a_n = 2u_n + 1$;

– Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_n và song song với trục hoành nên $b_n = a_n = 2u_n + 1$;

– Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_{n+1} và song song với trục tung nên hoành độ của nó bằng u_{n+1}.

Từ đó, do B_n nằm trên Δ nên $u_{n+1} = b_n = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

• Vậy, dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_{n+1} = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

3.15. a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1] - (2n^3 - 5n + 1) \\ &= 2.[\,(n+1)^3 - n^3] - 5.(n + 1 - n) \\ &= 2.[(n+1)^2 + (n+1).n + n^2] - 5 \\ &= 6n^2 + 6n - 3 = 3.(n^2 - 1) + 3n^2 + 6n > 0 \text{ (do } n \geq 1). \end{aligned}$$

Vì thế, dãy số (a_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (b_n) là một dãy số tăng. *Hướng dẫn*. Xét hiệu $b_{n+1} - b_n$.

c) Dãy số (c_n) là một dãy số giảm. *Hướng dẫn*. Xét hiệu $c_{n+1} - c_n$.

3.16. a) Dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, ta có

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \times \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vì thế, (u_n) là một dãy số tăng.

b) Dễ thấy $v_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, xét tỉ số $\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ ta có

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \times \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vì thế, (v_n) là một dãy số giảm.

c) Dễ thấy $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ ta có

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3^n}{n^2} \times \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Từ đó, suy ra

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow n \geq 2 \quad (\text{do } n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow n < \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow n = 1 \quad (\text{do } n \in \mathbb{N}^*).$$

Như vậy, ta có : $a_1 > a_2$ và $a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$.

Vì thế, (a_n) không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

3.17. a) Viết lại công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) dưới dạng

$$a_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}.$$

Từ đó, ta có với mọi $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - a_n = 3 + 6.\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3.((n+1)(n+2)-2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n(n+3)}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Vì thế, (a_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (b_n) là một dãy số giảm.

Hướng dẫn. Viết lại biểu thức xác định b_n dưới dạng tổng của một hằng số và một phân thức có tử thức là một nhị thức bậc nhất, mẫu thức là một tam thức bậc hai của n. Tiếp theo, xét hiệu $b_{n+1} - b_n$.

3.18. a) Viết lại công thức xác định a_n dưới dạng

$$a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

Từ đó, do

$$0 < n + \sqrt{n^2+1} < n + 1 + \sqrt{(n+1)^2+1} \quad (\forall n \geq 1),$$

suy ra $$a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{n+1+\sqrt{(n+1)^2+1}} = a_{n+1} \quad (\forall n \geq 1),$$

nghĩa là dãy số (a_n) là một dãy số giảm.

b) *Hướng dẫn*. Viết lại công thức xác định b_n dưới dạng

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}.$$

Từ đó, tương tự trên, suy ra (b_n) là một dãy số giảm.

3.19. Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng

$$u_n = \frac{a}{2} + \frac{2-3a}{2.(2n^2+3)}.$$

Từ đó, ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-3a}{2} \times \left(\frac{1}{2.(n+1)^2+3} - \frac{1}{2n^2+3} \right) \quad (\forall n \geq 1). \qquad (1)$$

Dễ thấy

$$\left(\frac{1}{2.(n+1)^2+3} - \frac{1}{2n^2+3} \right) < 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vì thế, từ (1) suy ra

a) (u_n) là một dãy số giảm $\Leftrightarrow \frac{2-3a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$;

b) (u_n) là một dãy số tăng $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{2}{3}$.

3.20. *Hướng dẫn.* Viết lại công thức xác định v_n dưới dạng

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2.(2n^2-3)}. \qquad (1)$$

Dễ thấy $\forall n \geq 1$, ta có $-1 \leq \dfrac{1}{2n^2-3} \leq \dfrac{1}{5}$. Do đó, từ (1) suy ra $-2 \leq v_n \leq 1$ $(\forall n \geq 1)$. Vì vậy, (v_n) là một dãy số bị chặn.

3.21. Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng

$$u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5.(5n+7)}.$$

Từ đó, suy ra

$$u_{n+1} - u_n = \frac{24}{5} \times \left(\frac{1}{5n+7} - \frac{1}{5(n+1)+7} \right) > 0 \quad (\forall n \geq 1),$$

và $$1 \leq u_n < \frac{7}{5} \ (\forall n \geq 1), \text{(do } 0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}\text{)}.$$

Vì thế, (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

3.22. a) Học sinh tự giải.

b) Với n là một số nguyên dương tuỳ ý, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+12} &= \sin\frac{(n+12)\pi}{3} + \cos\frac{(n+12)\pi}{6} \\ &= \sin\left(\frac{n\pi}{3} + 4\pi\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6} + 2\pi\right) \\ &= \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6} = u_n. \end{aligned}$$

3.23. a) Học sinh tự giải.

b) Từ kết quả của phần a), ta có

$$u_1 = u_4 = u_7 = u_{10} = u_{13} = u_{16}$$

$$u_2 = u_5 = u_8 = u_{11} = u_{14} = u_{17}$$

$$u_3 = u_6 = u_9 = u_{12} = u_{15}$$

Từ đó, kí hiệu S_{17} là tổng cần tính, ta có

$$S_{17} = 5.\ (u_1 + u_2 + u_3) + u_1 + u_2. \qquad (1)$$

Bằng cách tính trực tiếp, ta có $u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = 0$ và $u_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó, từ (1) ta được

$$S_{17} = 5.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.24. a) Ta có $v_2 = -\dfrac{3}{2}v_1^2 + \dfrac{5}{2}v_1 + 1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} + 1 = 2$;

$$v_3 = -\frac{3}{2}v_2^2 + \frac{5}{2}v_2 + 1 = -\frac{3}{2}\times 2^2 + \frac{5}{2}\times 2 + 1 = 0;$$

$$v_4 = -\frac{3}{2}v_3^2 + \frac{5}{2}v_3 + 1 = -\frac{3}{2}\times 0^2 + \frac{5}{2}\times 0 + 1 = 1.$$

b) Ta sẽ chứng minh $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp.

Từ giả thiết của bài ra và kết quả của phần a) ta có $v_1 = v_4$. Như vậy, ta có đẳng thức cần chứng minh khi $n = 1$.

Giả sử đã có đẳng thức nói trên khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh ta cũng có đẳng thức đó khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (v_n) và giả thiết quy nạp ta có

$$v_{k+4} = -\frac{3}{2}v_{k+3}^2 + \frac{5}{2}v_{k+3} + 1 = -\frac{3}{2}v_k^2 + \frac{5}{2}v_k + 1 = v_{k+1}.$$

Từ các chứng minh trên suy ra ta có $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

3.25. a) Học sinh tự giải.

b) Ta sẽ chứng minh

$$u_n = 7n - 6 \qquad (1)$$

với mọi $n \geq 1$,bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 = 7.1 - 6$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có

$$u_{k+1} = u_k + 7 = 7.k - 6 + 7 = 7.(k+1) - 6.$$

Từ các chứng minh trên suy ra ta có (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

3.26. a) Học sinh tự giải.

b) *Hướng dẫn*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.27. Học sinh tự giải.

3.28. *Hướng dẫn*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.29. *Hướng dẫn*. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$.

3.30. Học sinh tự giải.

3.31. a) Dãy số (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 3.

b) Dãy số (b_n) không phải là một cấp số cộng.

c) Dãy số (c_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 2.

3.32. *Giải*. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, vì điểm A_n nằm trên đường thẳng $x = n$ nên hoành độ của nó bằng n. Do A_n nằm trên đồ thị $(\mathscr{C})$ nên tung độ u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = 3n - 2.$$

Như vậy, theo đề bài ta cần chứng minh dãy số (u_n), với $u_n = 3n - 2$, là một cấp số cộng.

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$, ta có với mọi $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = (3.(n+1) - 2) - (3n - 2) = 3.$$

Từ đó suy ra (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3.1 - 2 = 1$ và công sai $d = 3$.

3.33. *Hướng dẫn*. Giả sử (u_n) là một cấp số cộng. Khi đó, tồn tại một hằng số d sao cho

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = d. \qquad (1)$$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n = 5 - 2u_n. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $u_n = \dfrac{5-d}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (u_n) là một dãy số không đổi. Suy ra, phải có $u_2 = a$ hay $5 - a = a$, dẫn tới $a = \dfrac{5}{2}$.

Ngược lại, với $a = \dfrac{5}{2}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = \dfrac{5}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 0$.

Tóm lại, có duy nhất giá trị a cần tìm là $a = \dfrac{5}{2}$.

3.34. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho. Theo giả thiết ta có $u_2 = 3$, $u_4 = 7$, và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính u_1, u_3, u_5.

Ta có $\quad 2u_3 = u_2 + u_4 = 3 + 7 = 10 \Rightarrow u_3 = 5.$

$$u_1 = 2u_2 - u_3 = 2.3 - 5 = 1$$

$$u_5 = 2u_4 - u_3 = 2.7 - 5 = 9.$$

3.35. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 + u_5 = 28$ và $u_5 + u_7 = 140$. Từ đó

$$\left.\begin{array}{l} 2u_4 = 28 \Rightarrow u_4 = 14 \\ 2u_6 = 140 \Rightarrow u_6 = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow 2u_5 = u_4 + u_6 = 14 + 70 = 84 \Rightarrow u_5 = 42.$$

Suy ra

$$u_7 = 140 - u_5 = 140 - 42 = 98,$$

$$u_3 = 28 - u_5 = 28 - 42 = -14,$$

$$u_2 = 2u_3 - u_4 = 2.(-14) - 14 = -42,$$

$$u_1 = 2u_2 - u_3 = 2.(-42) - (-14) = -70.$$

Vậy, cấp số cộng cần tìm là : $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$.

3.36. Từ giả thiết của bài toán suy ra $u_n = 2 + (n-1).(-3) = -3n + 5$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế với mỗi $n \geq 1$, điểm $A_n(n, u_n)$ nằm trên đường thẳng $y = -3x + 5$. Nói một cách khác :

Tất cả các điểm A_n, $n = 1, 2, 3, ...$, cùng nằm trên đường thẳng $y = -3x + 5$.

3.37. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho.

Vì cấp số cộng nói trên có công sai $d > 0$ nên $u_3 < u_5$. Vì thế, từ giả thiết hiệu của u_3 và u_5 bằng 6 ta được $u_5 - u_3 = 6$ hay $(u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6$. Suy ra $d = 3$.

Vì thế, từ giả thiết $u_4 = 11$ ta được $u_1 = u_4 - 3d = 11 - 3.3 = 2$.

Từ đó $u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5$, $u_3 = u_2 + d = 5 + 3 = 8$, $u_5 = u_4 + d = 11 + 3 = 14$,

$u_6 = u_5 + d = 14 + 3 = 17$ và $u_7 = u_6 + d = 17 + 3 = 20$.

3.38. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có

$9 = u_{17} - u_{20} = (u_1 + 16d) - (u_1 + 19d) = -3d \Rightarrow d = -3$.

$$153 = (u_{17})^2 + (u_{20})^2 = \frac{1}{2}\left[(u_{17} - u_{20})^2 + (u_{17} + u_{20})^2\right] = \frac{1}{2}\left[9^2 + (u_{17} + u_{20})^2\right]$$

$\Rightarrow (u_{17} + u_{20})^2 = 2 \times 153 - 81 = 225 = 15^2$. Xảy ra các trường hợp :

– *Trường hợp 1 :* $u_{17} + u_{20} = 15$. Khi đó

$15 = (u_1 + 16d) + (u_1 + 19d) = 2u_1 + 35d = 2u_1 + 35.(-3) = 2u_1 - 105 \Rightarrow u_1 = 60$.

– *Trường hợp 2 :* $u_{17} + u_{20} = -15$. Khi đó

$-15 = (u_1 + 16d) + (u_1 + 19d) = 2u_1 + 35d = 2u_1 + 35.(-3) = 2u_1 - 105 \Rightarrow u_1 = 45$.

Vậy, cấp số cộng đã cho có $u_1 = 60$ và $d = -3$, hoặc $u_1 = 45$ và $d = -3$.

3.39. *Giải.* Ta có

$$101 = (u_{31})^2 + (u_{34})^2 = \frac{1}{2}\left[(u_{31} + u_{34})^2 + (u_{31} - u_{34})^2\right] = \frac{1}{2}\left[11^2 + (u_{31} - u_{34})^2\right]$$

$$\Rightarrow (u_{31} - u_{34})^2 = 2 \times 101 - 121 = 81 = 9^2. \qquad (1)$$

Vì $d > 0$ nên $u_{31} < u_{34}$. Do đó, từ (1) ta được $u_{31} - u_{34} = -9$, hay

$$-9 = u_{31} - u_{34} = (u_1 + 30d) - (u_1 + 33d) = -3d \Rightarrow d = 3.$$

Vì thế

$11 = u_{31} + u_{34} = (u_1 + 30d) + (u_1 + 33d) = 2u_1 + 63d = 2u_1 + 63 \times 3 = 2u_1 + 189$

$\Rightarrow u_1 = -89$.

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là :

$$u_n = -89 + (n-1).3 \text{ hay } u_n = 3n - 92.$$

3.40. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có

$$u_{k-m} = u_1 + (k-m-1)d = u_1 + (k-1)d - md = u_k - md,$$

$$u_{k+m} = u_1 + (k+m-1)d = u_1 + (k-1)d + md = u_k + md.$$

Từ đó suy ra $u_{k-m} + u_{k+m} = 2u_k$ hay $u_k = \dfrac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2}$.

Áp dụng. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 = 2$ và $u_1 + u_7 = 10$.

Áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên cho $m = 3$ và $k = 4$, ta được

$$u_4 = \frac{u_1 + u_7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Suy ra $d = u_4 - u_3 = 5 - 2 = 3$. Do đó

$u_1 = u_3 - 2d = 2 - 2.3 = -4$, $u_2 = u_1 + d = -4 + 3 = -1$, $u_5 = u_4 + d = 5 + 3 = 8$,

$u_6 = u_5 + d = 8 + 3 = 11$ và $u_7 = u_6 + d = 11 + 3 = 14$.

3.41. a) Kí hiệu d là công sai và k là số các số hạng của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$d = u_2 - u_1 = 105 - 102 = 3.$$

Suy ra

$$999 = u_k = u_1 + (k-1).d = 102 + (k-1).3 = 99 + 3k \Rightarrow k = 300.$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = \frac{300.(u_1 + u_k)}{2} = \frac{300.(102 + 999)}{2} = 165150.$$

b) *Hướng dẫn*. Kí hiệu k là số các số hạng của cấp số cộng đã cho. Bằng cách tương tự như phần a), ta tìm được $k = 3\,012$. Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = \frac{3012.(u_1 + u_k)}{2} = \frac{3012.\left(\frac{1}{3} - 2007\right)}{2} = -3022040.$$

3.42. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng đã cho, ta có

$$90 = u_5 + u_{19} = (u_1 + 4d) + (u_1 + 18d) = u_1 + (u_1 + 22d) = u_1 + u_{23}.$$

Từ đó, kí hiệu S_{23} là tổng cần tính, ta được

$$S_{23} = \frac{23.(u_1 + u_{23})}{2} = \frac{23 \times 90}{2} = 1035.$$

3.43. Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d = 42 \\ u_1 + 3d + u_1 + 8d = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4. \end{cases}$$

Từ đó, kí hiệu S_{346} là tổng cần tính, ta được

$$S_{346} = \frac{346.(2u_1 + 345d)}{2} = \frac{346.(2 \times 11 + 345 \times 4)}{2} = 242\,546.$$

3.44. *Hướng dẫn.* Kí hiệu d là công sai và S_{15} là tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Vì (u_n) là cấp số cộng tăng nên $d > 0$.

Ta có

$$585 = S_{15} = \frac{15.(u_1 + u_{15})}{2} \Leftrightarrow u_1 + u_{15} = 78 \Leftrightarrow 2u_1 + 14d = 78$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 7d = 39. \qquad (1)$$

$$u_1^3 + u_{15}^3 = 302\,094 \Leftrightarrow (u_1 + u_{15})^3 - 3u_1u_{15}.\,(u_1 + u_{15}) = 302\,094$$

$$\Leftrightarrow 78^3 - 3u_1.\,(u_1 + 14d).\,78 = 302\,094 \Leftrightarrow u_1(u_1 + 14\,d) = 737. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ

$$\begin{cases} u_1 + 7d = 39 \\ u_1.(u_1 + 14d) = 737. \end{cases}$$

Giải hệ trên, với lưu ý $d > 0$, ta được $u_1 = 11$ và $d = 4$.

3.45. Học sinh tự giải.

3.46. a) Dãy số (a_n) là một cấp số nhân với công bội bằng $\frac{1}{7}$.

b) Dãy số (b_n) không là một cấp số nhân.

c) Dãy số (c_n) không là một cấp số nhân.

d) Dãy số (d_n) là một cấp số nhân với công bội bằng 3.

3.47. Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có

$$u_{n+1} + 3 = 4.(u_n + 3) \quad \forall n \geq 1.$$

Từ đó, theo định nghĩa dãy số (v_n) ta được $v_{n+1} = 4.v_n$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

3.48. *Hướng dẫn*. Từ giả thiết $a \neq 0$ dễ dàng suy ra $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$.

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra tất cả các số hạng của dãy số đó có cùng một loại dấu.

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân. Khi đó, tồn tại một hằng số $q > 0$ sao cho

$$u_{n+1} = u_n \,.\, q \quad \text{với mọi } n \geq 1. \qquad (1)$$

Từ (1) và hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra

$$u_n^2 = \frac{12}{q} \quad \text{với mọi } n \geq 1. \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1 :* $a > 0$. Khi đó, ta có $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, từ (2) ta được

$$u_n = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{q}} \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

hay (u_n) là một dãy số không đổi. Do vậy, phải có $u_2 = a$ hay $\dfrac{12}{a} = a$. Dẫn tới $a = 2\sqrt{3}$.

– *Trường hợp 2 :* $a < 0$. Khi đó, ta có $u_n < 0$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, từ (2) ta được

$$u_n = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{q}} \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

hay (u_n) là một dãy số không đổi. Do vậy, phải có $u_2 = a$ hay $\dfrac{12}{a} = a$. Dẫn tới $a = -\,2\sqrt{3}$.

Ngược lại :

– Với $a = 2\sqrt{3}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = 2\sqrt{3}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

– Với $a = -2\sqrt{3}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = -2\sqrt{3}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Tóm lại, tất cả các giá trị a cần tìm là $a = 2\sqrt{3}$ và $a = -2\sqrt{3}$.

3.49. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Theo giả thiết ta có $u_2 = 3$, $u_4 = 6$ và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính u_1, u_3, u_5.

Ta có $u_3^2 = u_2.u_4 = 3.6 = 18$, $u_1 = \dfrac{u_2^2}{u_3} = \dfrac{9}{u_3}$, $u_5 = \dfrac{u_4^2}{u_3} = \dfrac{36}{u_3}$. (1)

Vì cấp số nhân đã cho có công bội dương và $u_2 > 0$ nên $u_3 > 0$. Do đó, từ (1) ta được

$$u_3 = 3\sqrt{2}, u_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, u_5 = 6\sqrt{2}.$$

3.50. *Giải*. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có

$$u_3.\ u_5 = 5\ 184 \text{ và } u_5.\ u_7 = 746\ 496.$$

Vì cấp số nhân đã cho có số hạng đầu và công bội là các số âm nên

$$u_1 < 0, u_2 > 0, u_3 < 0, u_4 > 0, u_5 < 0, u_6 > 0, u_7 < 0.$$

Từ đó

$$\left.\begin{array}{l} u_4^2 = 5\ 184 \Rightarrow u_4 = 72 \\ u_6^2 = 746\,496 \Rightarrow u_6 = 864 \end{array}\right\} \Rightarrow u_5^2 = u_4.u_6 = 72 \times 864 = 62\,208 \Rightarrow u_5 = -144\sqrt{3}.$$

Suy ra

$$u_7 = \frac{746\,496}{-144\sqrt{3}} = -1\ 728\sqrt{3},$$

$$u_3 = \frac{5184}{-144\sqrt{3}} = -12\sqrt{3},$$

$$u_2 = \frac{u_3^2}{u_4} = \frac{432}{72} = 6,$$

$$u_1 = \frac{u_2^2}{u_3} = \frac{36}{-12\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

Vậy, cấp số nhân cần tìm là : $-\sqrt{3}$, 6, $-12\sqrt{3}$, 72, $-144\sqrt{3}$, 864, $-1728\sqrt{3}$.

3.51. Từ định nghĩa tam giác trung bình suy ra mỗi cạnh của tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ là một đường trung bình của tam giác $A_nB_nC_n$. Vì thế, từ giả thiết tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều suy ra $A_nB_nC_n$ là tam giác đều với mọi $n \geq 1$. Từ đó, kí hiệu a_n là độ dài cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ta có

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{3}} = \frac{a_n}{2.\sqrt{3}} = \frac{r_n}{2} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (r_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$ và số hạng đầu

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Theo định lí về số hạng tổng quát của một cấp số nhân, ta có số hạng tổng quát của cấp số nhân nói trên là :

$$r_n = r_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}.2^{n-1}}.$$

3.52. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đó.

Theo giả thiết ta có $u_4 = 6$, $u_7 = 243u_2$ và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính $u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7$.

Hiển nhiên có $u_2 \neq 0$; vì nếu ngược lại thì phải có $u_4 = 0$, trái với giả thiết của bài ra. Vì thế, từ giả thiết $u_7 = 243u_2$, theo công thức xác định số hạng tổng quát của một cấp số nhân, ta được

$$243 = \frac{u_7}{u_2} = \frac{u_1.q^6}{u_1.q} = q^5.$$

Suy ra $q = 3$. Vì thế, từ giả thiết $u_4 = 6$ ta được $u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$.

Từ đó : $u_2 = u_1 . q = \frac{2}{3}$, $u_3 = u_2 . q = 2$, $u_5 = u_4 . q = 18$, $u_6 = u_5 . q = 54$,

$u_7 = u_6 . q = 162$.

3.53. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^{19} = 8.u_1.q^{16} \\ u_1.(q^2 + q^4) = 272 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^{16}.(q^3 - 8) = 0 \\ u_1.q^2.(1 + q^2) = 272. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Dễ thấy, $u_1 . q \neq 0$; vì nếu ngược lại thì phải có $u_3 = u_5 = 0$, trái với giả thiết của bài ra. Do đó, ta có

(I) $\Leftrightarrow$ $u_1 = 13{,}6$ và $q = 2$.

3.54. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có

$$\begin{cases} 6u_2 + u_5 = 1 \\ 3u_3 + 2u_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(6q + q^4) = 1 & (1) \\ u_1.(3q^2 + 2q^3) = -1. & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy, $u_1 . q \neq 0$. Do đó cộng theo vế (1) và (2) ta được

$$q^3 + 2q^2 + 3q + 6 = 0 \Leftrightarrow (q + 2)(q^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow q = -2.$$

Từ đó suy ra

$$u_1 = \frac{1}{4} \text{ và } q = -2.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là :

$$u_n = \frac{1}{4} \times (-2)^{n-1}.$$

3.55. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân (u_n). Xét hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1 :* $q = 0$. Khi đó $u_n = 0$ với mọi $n \geq 2$. Vì thế, hiển nhiên ta có điều cần chứng minh.

– *Trường hợp 2 :* $q \neq 0$. Khi đó

$$u_{k-m} = u_1 . q^{k-m-1} = \frac{u_1 . q^{k-1}}{q^m} = \frac{u_k}{q^m},$$

$$u_{k+m} = u_1 . q^{k+m-1} = u_1 . q^{k-1} . q^m = u_k . q^m.$$

Từ đó suy ra $u_{k-m} . u_{k-m} = u_k^2$ hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-m}.u_{k+m}}$.

Áp dụng. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 = 2$ và $u_1 . u_7 = 18$.

Vì cấp số nhân cần tìm có công bội âm và $u_3 > 0$ nên $u_4 < 0$. Do đó, áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên cho $m = 3$ và $k = 4$, ta được

$$u_4 = -\sqrt{u_1 . u_7} = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}.$$

Suy ra $\quad q = \dfrac{u_4}{u_3} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Do đó

$$u_2 = \frac{u_3}{q} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},\ u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{4}{9},\ u_5 = u_4 . q = 9,\ u_6 = u_5 . q = -\frac{27\sqrt{2}}{2},$$

$$u_7 = u_6 . q = \frac{81}{2}.$$

Vậy, cấp số nhân cần tìm là : $\dfrac{4}{9}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, 2, -3\sqrt{2}, 9, -\dfrac{27\sqrt{2}}{2}, \dfrac{81}{2}$.

3.56. a) Kí hiệu q là công bội và k là số số hạng của cấp số nhân đã cho. Ta có

$$q = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Suy ra

$$64\sqrt{2} = u_k = u_1 . q^{k-1} = \sqrt{2} . (-\sqrt{2})^{k-1} \Rightarrow k = 13.$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = u_1 \times \frac{1-q^{13}}{1-q} = \sqrt{2} \times \frac{1-(-\sqrt{2})^{13}}{1-(-\sqrt{2})} = -126 + 127\sqrt{2}.$$

b) Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Ta có

$$\frac{81}{256}=u_{11}=u_1.q^{10}=\frac{4}{3}\times q^{10}\Rightarrow q^{10}=\frac{243}{1024}\Rightarrow q=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$\text{S}=u_1\times\frac{1-q^{11}}{1-q}=\frac{4}{3}\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{3367+1562.\sqrt{3}}{768}.$$

3.57. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy, $u_1.\ q\neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases}8.u_2-5\sqrt{5}.u_5=0\\ u_1^3+u_3^3=189\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q.(8-5\sqrt{5}.q^3)=0\\ u_1^3.(1+q^6)=189\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ u_1=5\end{cases}.$$

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tính, ta được

$$S=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{12}}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{57645+23058.\sqrt{5}}{3125}.$$

3.58. Ta có

$$\begin{cases}u_1+u_3=3\\ u_1^2+u_3^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.(1+q^2)=3\quad(1)\\ u_1^2.(1+q^4)=5\end{cases}\quad(\text{I}).$$

Từ (1) suy ra $u_1>0$. Do đó

$$(\text{I})\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.(1+q^2)=3\\ 2q^4-5q^2+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.(1+q^2)=3\\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(\text{do } q\in(0\,;1))\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}.$$

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tính, ta được

$$S=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{25}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{8191+4095.\sqrt{2}}{2048}.$$

3.59. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy, $u_1.\ q\neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}.u_2 + u_5 = 0 \\ u_3^2 + u_6^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q.(3\sqrt{3} + q^3) = 0 \\ u_1^2.q^4.(1 + q^6) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\sqrt{3} \\ |u_1| = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội q nên dãy số $(|u_n|)$ là một cấp số nhân với công bội $|q|$. Vì thế, kí hiệu S là tổng cần tính, từ (I) ta được

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1-(\sqrt{3})^{15}}{1-\sqrt{3}}.$$

3.60. *Hướng dẫn.* Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$.

3.61. Nhận thấy $x \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $y = z = 0$ và do đó cấp số cộng x, $2y$, $3z$ có công sai bằng 0, trái với giả thiết của đề bài.

Vì x, y, z là cấp số nhân với công bội q nên

$$y = xq \text{ và } z = xq^2. \quad (1)$$

Vì x, $2y$, $3z$ là một cấp số cộng nên

$$4y = x + 3z. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$4xq = x.(1 + 3q^2)$$
$$\Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \text{ (vì } x \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \text{ (vì } q \neq 1 \text{ theo giả thiết).}$$

3.62. Vì dãy số x, y, z là một cấp số nhân nên $y^2 = x.z$.

Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng nhận các số x, y, z lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín, ta có $y - x = 2d$ và $z - y = (z - x) - (y - x) = 8d - 2d = 6d$. Từ đó, suy ra $z - y = 3.(y - x)$, hay $z + 3x = 4y$.

Như vậy, từ các giả thiết của bài ra ta được

$$\begin{cases} y^2 = x.z & (1) \\ z + 3x = 4y & (2) \\ x + y + z = 13 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3), ta có $x = \dfrac{5y-13}{2}$ và $z = \dfrac{39-7y}{2}$. Thế x và z vào (1), ta được

$$4y^2 = (5y - 13)(39 - 7y), \text{ hay } 3y^2 - 22y + 39 = 0.$$

Từ đó $y = 3$ hoặc $y = \dfrac{13}{3}$.

– Với $y = 3$ ta có $x = \dfrac{5.3-13}{2} = 1$ và $z = \dfrac{39-7.3}{2} = 9$.

– Với $y = \dfrac{13}{3}$ ta có $x = \dfrac{5\times\dfrac{13}{3} - 13}{2} = \dfrac{13}{3}$ và $z = \dfrac{39 - 7\times\dfrac{13}{3}}{2} = \dfrac{13}{3}$.

Ngược lại, dễ thấy các số $x = 1$, $y = 3$, $z = 9$, cũng như các số $x = \dfrac{13}{3}$, $y = \dfrac{13}{3}$, $z = \dfrac{13}{3}$, đều thoả mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy, các số x, y, z vừa nêu trên là tất cả các số cần tìm.

3.63. *Hướng dẫn*. Từ các giả thiết của bài ra, ta có

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ (y-4)^2 = xz \\ 2(y-4) = x + z - 9. \end{cases}$$

Giải hệ trên rồi kiểm tra các nghiệm tìm được, ta được tất cả các số x, y, z cần tìm là :

$$x = 1, y = 2, z = 4 \text{ và } x = 4, y = 2, z = 1.$$

3.64. (A).

3.65. (A).

3.66. (C).

3.67. (C).

3.68. a) Học sinh tự giải.

b) *Hướng dẫn*. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.69. a) Ta có

$u_{n+4} = \cos(3(n+4)+1)\dfrac{\pi}{6} = \cos((3n+1)\dfrac{\pi}{6} + 2\pi) = \cos(3n+1)\dfrac{\pi}{6} = u_n$ $\forall n \geq 1$.

b) *Hướng dẫn*. Kí hiệu S là tổng 27 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Từ kết quả phần a), ta được

$$S = 6(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_1 + u_2 + u_3\,. \qquad (1)$$

Bằng cách tính trực tiếp, ta có : $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, $u_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_3 = \dfrac{1}{2}$, $u_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được : $S = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.70. a) (u_n) là một dãy số tăng.

Hướng dẫn. Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$.

b) (v_n) là một dãy số giảm.

Hướng dẫn. Xét tỉ số $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

3.71. a) Ta có $u_1 = S_1 = 2$, $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1 = 1 - 2 = -1$,

$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) - (u_1 + u_2) = S_3 - S_2 = -4$.

b) Đặt $S_0 = 0$, ta có số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(7-3n)}{2} - \frac{(n-1)[7-3(n-1)]}{2} = 5 - 3n.$$

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = 5 - 3(n+1) - 5 + 3n = -3$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (u_n) là một cấp số cộng với công sai bằng -3.

3.72. *Hướng dẫn.* Với mỗi $n \geq 1$, do A_n và B_n nằm trên parabol $y = x^2$ nên $A_n = (a_n\,;\ a_n^2)$ và $B_n = (b_n\,;\ b_n^2)$. Từ đó :

– Do đường thẳng A_nB_n có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{5}$ nên $a_n + b_n = -\dfrac{1}{5}$ với mọi $n \geq 1$;

– Do đường thẳng B_nA_{n+1} có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$ nên $a_{n+1} + b_n = \dfrac{1}{4}$ với mọi $n \geq 1$.

Suy ra với mọi $n \geq 1$, ta có

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9}{20} \quad \text{và} \quad b_{n+1} - b_n = -\frac{9}{20}.$$

Vì thế :

– Dãy số (a_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu a_1 và công sai $d = \dfrac{9}{20}$;

– Dãy số (b_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $b_1 = -\dfrac{1}{5} - a_1$ và công sai $d = -\dfrac{9}{20}$.

Số hạng tổng quát : $a_n = a_1 + (n-1) \times \dfrac{9}{20}$ và $b_n = -\dfrac{1}{5} - a_1 - (n-1) \times \dfrac{9}{20}$.

3.73. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $n \geq 1$

$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2$, hay $v_{n+1} = v_n + 2$.

Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = u_1^2 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Từ định nghĩa dãy số (u_n) và dãy số (v_n) dễ dàng suy ra $u_n > 0$ và $v_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó, ta có $u_n = \sqrt{v_n}$ với mọi $n \geq 1$.

Từ kết quả phần a) suy ra : $v_n = 1 + (n - 1).2 = 2n - 1$ $(\forall n \geq 1)$. Vì thế

$$u_n = \sqrt{2n-1} \ (\forall n \geq 1).$$

c) $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{1001}^2$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{1001} = \frac{1001.(2.1+(1001-1).2)}{2} = 1\ 002\ 001.$$

3.74. a) Kí hiệu S_N là tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n). Ta sẽ chứng minh

$$S_N = u_{N+1} - u_1 \qquad (1)$$

với mọi $N \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $N = 1$, ta có $S_1 = v_1 = u_2 - u_1$. Như vậy, (1) đúng khi $N = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $N = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $N = k + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp và định nghĩa dãy số (v_n) ta có

$$S_{k+1} = S_k + v_{k+1} = (u_{k+1} - u_1) + (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{k+2} - u_1.$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $N \geq 1$.

b) Từ định nghĩa dãy số (v_n) và hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $v_n = n$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $v_{n+1} - v_n = (n + 1) - n = 1$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai bằng 1.

3.75. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$ với mọi $n \geq 1$. Do đó

$$v_n = 2n - 1 \ (\forall n \geq 1).$$

Suy ra $v_{n+1} - v_n = (2(n + 1) - 1) - (2n - 1) = 2$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai bằng 2.

b) *Hướng dẫn.* Kí hiệu S_N là tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n). Từ kết quả phần a), ta có

$$S_N = \frac{N.(2.1+(N-1).2)}{2} = N^2. \qquad (1)$$

Mặt khác, bằng cách tương tự như lời giải phần a) Bài tập 3.76, ta chứng minh được

$$S_N = u_{N+1} - u_1 \ (\forall N \geq 1). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được : $u_{N+1} - u_1 = N^2$, hay $u_{N+1} = N^2 + u_1 = N^2 + 1$ $(\forall N \geq 1)$. Từ đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là : $u_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

3.76. a) Ta có $u_1 = S_1 = 2$, $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1 = \dfrac{8}{3} - 2 = \dfrac{2}{3}$,

$$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) - (u_1 + u_2) = S_3 - S_2 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} = \frac{2}{9}.$$

b) Đặt $S_0 = 0$, ta có $u_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}} - \dfrac{3^{n-1} - 1}{3^{n-2}} = \dfrac{2}{3^{n-1}}$ $(\forall n \geq 1)$.

c) Ta có $u_{n+1} = \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{3} u_n$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội bằng $\dfrac{1}{3}$.

3.77. a) Với mỗi $n \geq 1$, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là tung độ của điểm A_n và điểm B_n. Khi đó :

– Do A_n nằm trên (d_1) nên $a_n = 2u_n - 1$.

– Do B_n là giao điểm của (d_2) và đường thẳng đi qua A_n, song song với trục tung nên $b_n = u_n$. Suy ra với mọi $n \geq 1$:

$$h_n = a_n - b_n = (2u_n - 1) - u_n = u_n - 1. \qquad (1)$$

Hơn nữa, với mỗi $n \geq 1$, do B_{n+1} nằm trên đường thẳng đi qua A_n và song song với trục hoành nên $b_{n+1} = a_n = 2u_n - 1$. Suy ra

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \ \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó ta được $u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1)$ với mọi $n \geq 1$, hay $h_{n+1} = 2h_n$ với mọi $n \geq 1$ (theo (1)). Vì thế, (h_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu

$h_1 = u_1 - 1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội $q = 2$.

b) Ta có $h_n = h_1 . q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra

$$u_n = h_n + 1 = 2^{n-2} + 1 \ \text{ với mọi } n \geq 1.$$

3.78. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $\forall n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n}, \text{ hay } v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n.$$

Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 = \frac{1}{3}$ và công bội bằng $\frac{1}{3}$.

b) Ta có $v_n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $u_n = \frac{n}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$.

c) Ta có $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \ldots + \frac{u_{11}}{11}$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{11}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{11}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^{11} - 1}{2.3^{11}} = \frac{88\,573}{177147}.$$

3.79. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $u_{n+1} - \frac{1}{5} = 6\left(u_n - \frac{1}{5}\right)$ với mọi $n \geq 1$, hay

$$\forall n \geq 1,\ v_{n+1} = 6v_n.$$

Vì thế, dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ và công bội $q = 6$.

b) Từ kết quả phần a) suy ra với mọi $n \geq 1$

$$v_n = v_1 .\ q^{n-1} = \frac{4.6^{n-1}}{5};$$

$$u_n = v_n + \frac{1}{5} = \frac{4.6^{n-1} + 1}{5}.$$

c) Kí hiệu T_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và S_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n). Ta có

$$T_{10} = S_{10} + 10 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{1 - 6^{10}}{1 - 6} + 2 = 9\,674\,590.$$

3.80. *Hướng dẫn*

– Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có $q \neq 0$. Vì thế, $(\frac{1}{u_n})$ là một cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

– Bằng phương pháp phản chứng, dễ dàng chứng minh được $q \neq 1$. Do đó

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49.\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \times \dfrac{1 - q^5}{1 - q} = \dfrac{49}{u_1} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{q^5}}{1 - \dfrac{1}{q}} \\ u_1.(1 + q^2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 = \dfrac{49}{q^4} \\ u_1.(1 + q^2) = 35. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Từ hệ (I) ta được $u_1 = 28$.

3.81. Vì các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên

$$2(5x + 2y) = (x + 6y) + (8x + y) \text{ hay } x = 3y. \qquad (1)$$

Vì các số $x + \dfrac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên

$$(y - 1)^2 = \left(x + \frac{5}{3}\right)(2x - 3y) \text{ hay } 2x^2 - y^2 - 3xy + \frac{10}{3}x - 3y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2), ta được

$$8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hoặc } y = \frac{1}{8}.$$

– Với $y = -1$ ta có $x = -3$.

– Với $y = \dfrac{1}{8}$ ta có $x = \dfrac{3}{8}$.

3.82. Vì các số $x + 5y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên

$$2(5x + 2y) = (x + 5y) + (8x + y) \text{ hay } x = 2y. \qquad (1)$$

Vì các số $(y - 1)^2$, $xy - 1$, $(x + 2)^2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên

$$(xy - 1)^2 = (y - 1)^2.(x + 2)^2 \text{ hay } (x - 2y + 1)(2xy - x + 2y - 3) = 0. \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2), ta được

$$4y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

– Với $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x = -\sqrt{3}$.

– Với $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x = \sqrt{3}$.