C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

5.1. Với mỗi $a \neq 0$, ta tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm đó theo định nghĩa.

• Tính Δy

$$\Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

• Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = y'(x).$$

5.2. a) -4 ; b) 2 và 4.

5.3. a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ và $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} ; \frac{-\sqrt{3}}{9}\right)$;

b) Muốn có tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ mà hệ số góc của tiếp tuyến đó âm thì phải tồn tại điểm x_0 sao cho $f'(x_0) < 0$. Ở đây $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$; vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đã cho mà hệ số góc của nó âm.

5.4. Ta có

$$y' = 2kx \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(a ; ka^2)$ của parabol $(\mathcal{P})$ là

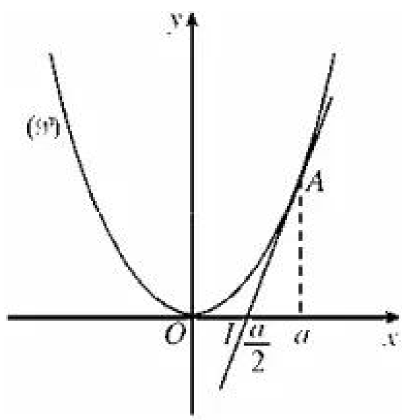
$$y = 2ka(x-a) + ka^2 = 2kax - ka^2.$$

Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến này với trục Ox. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình

$2kax - ka^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ (vì $ak \neq 0$).

Suy ra $I\left(\frac{a}{2} ; 0\right)$.

Từ đó để vẽ tiếp tuyến tại điểm $A(a ; ka^2)$ của parabol $(\mathcal{P})$, ta nối điểm A với điểm $I\left(\frac{a}{2} ; 0\right)$; đường thẳng AI là tiếp tuyến phải tìm.



Hình 5.2

5.5. Theo công thức tính đạo hàm của hàm số tại điểm 0 :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

ta được

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|^3} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|^3}}{x}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{|x|^3}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

và $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{|x|^3}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x\sqrt{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{-x}\right) = 0$

nên $f'(0) = 0$.

5.6. a) • Với $x < 2$ thì $f(x) = x^2 - x + 2$ là hàm số liên tục và đạo hàm của nó là $f'(x) = 2x - 1$.

• Với $x > 2$ thì $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ là hàm số liên tục và đạo hàm của nó là

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

• Với $x = 2$ thì ta có

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - x + 2) = 4$$

và

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-1} = 1.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, tức là hàm số không liên tục tại điểm $x = 2$, nên nó cũng không có đạo hàm tại điểm này. (Ta đã biết : Hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó, suy ra : Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó).

b) Tương tự như bài a), dễ dàng chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục và có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 1$ và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$. Vì

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$$

nên hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 1$.

Mặt khác ta có

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2 + x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 3$$

và $$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{2}{x}\right) = -2\,.$$

Do đó

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Suy ra hàm số đã cho không có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

c) Chứng minh tương tự như trên, ta thấy hàm số đã cho liên tục và có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$ và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ -3x^2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Ta có

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1).$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Mặt khác ta có :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

và

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(-x^3 + 1) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-x^2) = 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ nên suy ra

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

hay $f'(0) = 0.$

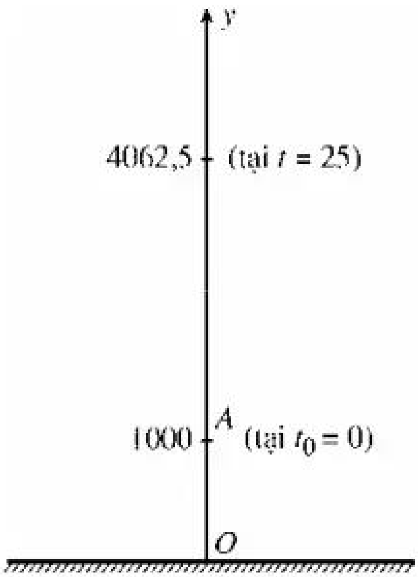
Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$, hàm số đã cho có đạo hàm và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \text{ khi } x \leq 0 \\ -3x^2 \text{ khi } x > 0. \end{cases}$$

Chú ý. Có thể không cần chứng minh hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$ (theo định nghĩa) như đã làm, mà lí luận như sau (khi đã chứng minh được $f'(0) = 0$): "Vì hàm số đã cho có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nên nó liên tục tại điểm đó.

5.7. a) Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng từ mặt đất lên trời, gốc O ở mặt đất và A là vị trí viên đạn được bắn lên, gốc thời gian (tức lúc $t = 0$) được tính từ vị trí A (h. 5.3) ; khi đó chuyển động của viên đạn là chuyển động biến đổi đều với vận tốc ban đầu $v_0 = 245\text{m/s}$ và với gia tốc $g = -9{,}8\text{m/s}^2$. (Gia tốc nhận giá trị âm vì vectơ gia tốc ngược chiều dương của trục Oy). Phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = 1000 + 245t - 4{,}9t^2.$$



Hình 5.3

Ta có $v(t) = y' = 245 - 9{,}8t.$

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất và sẽ bắt đầu rơi khi

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 245 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 25(\text{s})$$

Khi đó viên đạn cách mặt đất là

$$y(25) = 1000 + 245.25 - 4{,}9.25^2 = 4062{,}5(\text{m}).$$

b) Viên đạn rơi đến đất khi $y = 0$. Vậy nếu gọi t_1 là thời gian kể từ khi viên đạn được bắn lên trời đến khi nó rơi tới đất thì t_1 phải là nghiệm dương của phương trình

$$0 = 1000 + 245t - 4{,}9t^2 \Leftrightarrow t_1 \approx 54\,(\text{s}).$$

5.8. a) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$; b) $3,5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

c) $2x\left(3x^4-28x^2+49\right)$; d) $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$; e) $\frac{3-2t}{(t^2-3t+1)^2}$.

5.9. $f(4)=8$; $f'(4)=2,5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $f'(a^2)=3-\frac{1}{|a|}$.

5.10. a) $-20(1-x)^{19}$; b) $15\left(t^2+\frac{1}{t^4}+1\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3t\right)^4$;

c) $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$; d) $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

5.11. a) Đặt $u=x^2$, ta có hàm số hợp $y=f(u)$, $u=u(x)=x^2$.

Vậy

$$y'=f'(u).u'(x)=f'(x^2).2x.$$

b) $y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[2f(x).f'(x)+2g(x).g'(x)\right]$.

5.12. • Giả sử $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$, khi đó ta có

$$f(x)=f(-x)\ \ (\forall x\in\mathbb{R}).$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$f'(x)=f'(-x).(-x)'\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x).$$

Do đó $f'(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

• Chứng minh tương tự cho trường hợp $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

5.13. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

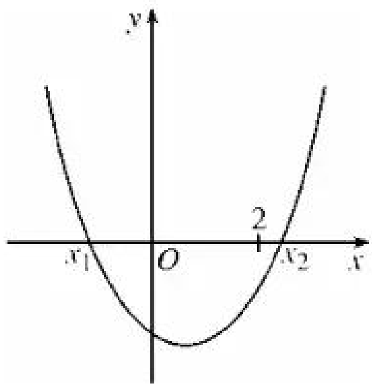
$$f'(x)=3x^2-4x+m.$$

a) Để $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì ta phải tìm m sao cho $f'(x)$ phải là tam thức bậc hai ax^2+bx+c với hệ số $a>0$ và có nghiệm kép, tức là

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = \frac{4}{3}.$$

b) Để $f'(x) \geq 0$ với mọi x thì ta phải tìm m sao cho

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}.$$

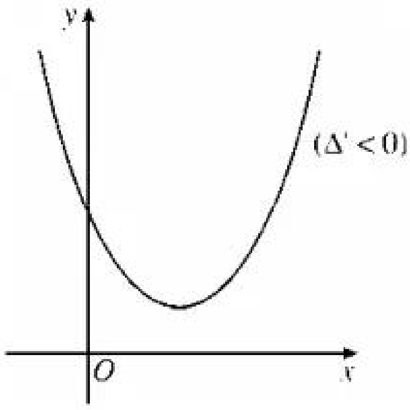


Hình 5.4

c) (h.5.4) Để $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0 \ ; \ 2)$ thì ta phải tìm m sao cho số 0 và số 2 thuộc đoạn $[x_1 \ ; x_2]$ (x_1 và x_2 là hai nghiệm của $f'(x)$) tức là

$$\begin{cases} af'(0) \leq 0 \\ af'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.m \leq 0 \\ 3(4 + m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leq -4.$$



Hình 5.5a

d) Để $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$ thì ta phải xét hai trường hợp sau đây

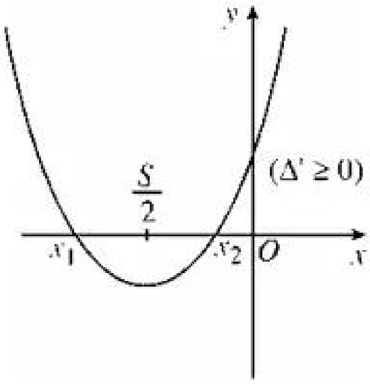
• Trường hợp thứ nhất (h. 5.5a)

Ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ vô nghiệm và có $a > 0$, tức là

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}.$$

• Trường hợp thứ hai (h. 5.5b)

Ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ có $a > 0$ đồng thời có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn các điều kiện $x_1 \leq x_2 \leq 0$, tức là



Hình 5.5b

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m \geq 0 \\ af'(0) = 3m \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - 0 = \dfrac{2}{3} \leq 0 \text{ (loại).} \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Chú ý. Về nguyên tắc phải xét hai trường hợp, dù trong bài này trường hợp thứ hai vô nghiệm.

5.14. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = mx^2 - mx + 3 - m.$$

a) Ta phải xét hai trường hợp sau đây :

1. Với $m = 0$ thì $f'(x) = 3 > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Vậy $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

2. Với $m \neq 0$ (khi đó $f'(x)$ là một tam thức bậc hai) thì ta phải tìm m sao cho

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3-m) = m(5m-12) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}.$$

Vậy các giá trị của m thoả mãn điều kiện bài toán là $0 \leq m < \frac{12}{5}$.

Chú ý. Không được ghép hai trường hợp 1 và 2 (vì trong trường hợp 1, $f(x)$ không phải là một tam thức bậc hai nên không áp dụng được định lí về dấu của tam thức bậc hai).

b) Để $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu thì ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt và tích của chúng là $P = \frac{c}{a} > 0$ (hay số 0 nằm ngoài hai nghiệm) tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m(5m-12) > 0 \\ \dfrac{3-m}{m} > 0 \text{ (hay } m(3-m) > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{12}{5} < m < 3.$$

c) Vì $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) nên ta có

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{m}{m} = 1 \\ x_1 . x_2 = \dfrac{3-m}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m \geq \dfrac{12}{5} \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ thức phải tìm là $x_1 + x_2 = 1$.

5.15. a) $x_1 \approx -0,7208$; $x_2 \approx 1,3874$ hoặc viết $x_1 = -0,7208 \pm 0,0001$;

$x_2 = 1,3874 \pm 0,0001.$

b) $x_0 = 0$; $x_1 \approx -1,4430$; $x_2 \approx 0,6930.$

5.16. ĐKXĐ của hàm số $f'(x)$ là $x < -2$ hoặc $x > 4$. Vậy ta phải giải bất phương trình

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}} \le 1 \text{ (với } x < -2 \text{ hoặc } x > 4\text{)}.$$

• Với $x < -2$ thì $x - 1 < 0$, do đó

$$f'(x) \le 1$$

luôn luôn đúng. Vậy $x < -2$ thoả mãn điều kiện bài toán.

• Với $x > 4$ thì $x - 1 > 0$, do đó

$$f'(x) \le 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 \le \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \le x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow 1 \le -8 \text{ (loại)}$$

Vậy đáp số của bài toán là $x < -2.$

5.17. a) $y = -3x - 7$; $\quad y = -3x + \dfrac{67}{27}.$

b) $y = -7x + 5$; $\quad y = -7x + \dfrac{103}{27}.$

c) $y = 2$; $\quad y = -\dfrac{25}{4}x + 2.$

5.18. Trước hết ta hãy viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại tiếp điểm $A(-1 ; 0)$. Ta có

$$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1 \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Với $x_0 = -1$, $f(x_0) = 0$ thì $f'(x_0) = 1$, do đó phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = x + 1. \text{ (T)}$$

Để tiếp tuyến (T) cũng là một tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại một điểm $B(x_1 ; f(x_1))$ khác điểm $A(-1 ; 0)$ thì điều kiện cần và đủ là (T) phải cắt đồ thị $(\mathscr{C})$ tại B (tức là ta phải có $f(x)=x+1$) đồng thời hệ số góc của tiếp tuyến tại B phải bằng hệ số góc của tiếp tuyến (T) (tức là ta phải có $f'(x)=1$). Tóm lại ta phải giải hệ thống phương trình

$$\begin{cases} f(x)=x+1 \\ f'(x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^4+2x^2+x=x+1 \\ -4x^3+4x+1=1 \end{cases} \qquad (*)$$

Nghiệm của hệ thống này chính là hoành độ các tiếp điểm của (T) với đồ thị $(\mathscr{C})$.

Giải hệ (*), ta được $x=\pm 1$.

Với $x_0=-1$, ta được tiếp điểm $A(-1\ ;\ 0)$.

Với $x_0=1$, ta được tiếp điểm $B(1\ ;\ 2)$.

Vậy đường thẳng $y=x+1$ vừa là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại tiếp điểm $A(-1\ ;\ 0)$, vừa là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại tiếp điểm $B(1\ ;\ 2) \neq A(-1,\ 0)$.

5.19. a) $\dfrac{3}{5}$; b) $-\dfrac{2}{9}$; c) $\dfrac{1}{2}$;

d) • *Cách 1*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

(vì $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=1$ và $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 0=1$).

• *Cách 2*. Đặt $\dfrac{\pi}{2}-x=t$ thì khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ ta sẽ có $t\to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x = \lim\limits_{t\to 0} t\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = \lim\limits_{t\to 0} t.\cot t = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}.\cos t = 1.$

5.20. a) $\dfrac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$; b) $\dfrac{t-\sin t\cos t}{t^2\cos^2 t}$;

c) $\dfrac{(1+\tan t)(\sin t+t\cos t)-\dfrac{1}{\cos^2 t}(t\sin t)}{(1+\tan t)^2}$; d) $-\sin^3 x$;

e) $\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x+1}.\sin^2\sqrt{x^2-x+1}}$; g) $2\cos x\cos(2\sin x)$;

h) $-6\cos 4x.\sin 8x$; i) $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

5.21. Để hàm số có đạo hàm thì ta phải có $\cos 2x>0$. Với điều kiện đó thì

$$f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{\cos 2x}-\cos x.\dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-2\sin 2x)}{\cos 2x}$$

$$=\frac{-\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$$

• Khi $x=\dfrac{\pi}{3}$ thì $\cos 2x=\cos\dfrac{2\pi}{3}<0$, nên không tồn tại $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

• Khi $x=\dfrac{\pi}{6}$ thì $\cos 2x=\cos\dfrac{\pi}{3}>0$, nên tồn tại $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ và

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sqrt{\cos^3\dfrac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}}=\sqrt{2}.$$

5.22. *Cách 1.* Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$$

$$=2\sin 2x(-\cos 2x)=-\sin 4x.$$

Mặt khác ta có

$$g'(x)=\frac{1}{4}(-4\sin 4x)=-\sin 4x.$$

Vậy với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=g'(x).$$

Cách 2. Ta chứng minh rằng $f(x)$ và $g(x)$ khác nhau một hằng số ; vì hai hàm số khác nhau một hằng số thì rõ ràng đạo hàm của chúng bằng nhau (nếu chúng có đạo hàm). Thật vậy, ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

tức là

$$f(x) = \frac{3}{4} + g(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Vậy $\qquad f'(x) = g'(x).$

5.23. Học sinh tự chứng minh.

5.24. *Cách 1*. Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số hợp

$$(\cos^2 u)' = 2\cos u(-\sin u).u' = -u'.\sin 2u\,,$$

ta được

$$y' = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)\right] + \left[\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - 2\sin 2x$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin(-2x) + 2\cos\frac{4\pi}{3}\sin(-2x) - 2\sin 2x \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Vì $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ nên

$$y' = \sin 2x + \sin 2x - 2\sin 2x = 0.$$

Cách 2. Áp dụng công thức hạ bậc

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2},$$

ta chứng minh được $y = 1$. Vậy $y' = 0$.

5.25. a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin x.\sin\frac{\pi}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -2\sin 17x - \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 17x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 17x + \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-17x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \dfrac{\pi}{3} = -17x + k2\pi \\ 5x + \dfrac{\pi}{3} = \pi + 17x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{66} + \dfrac{k\pi}{11} \\ x = -\dfrac{\pi}{18} - \dfrac{k\pi}{6}. \end{array}\right.$$

5.26. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -a\sin x + 2\cos x - 3.$$

Để $f'(x) = 0$ có nghiệm thì ta phải tìm a sao cho phương trình

$$2\cos x - a\sin x = 3 \qquad (1)$$

có nghiệm. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}\cos x - \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}\sin x = \frac{3}{\sqrt{a^2+4}}. \qquad (2)$$

Vì $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right)^2 = 1$ nên có số α sao cho $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}} \\ \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}. \end{cases}$

Thế vào (2), ta được : $\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{a^2+4}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \frac{3}{\sqrt{a^2+4}}. \qquad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \le \frac{3}{\sqrt{a^2+4}} \le 1 \Leftrightarrow 3 \le \sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow a^2 + 4 \ge 9 \Leftrightarrow a^2 \ge 5 \Leftrightarrow |a| \ge \sqrt{5}.$$

5.27. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2(1-2m)\sin x - 2m.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) - (1-2m)\sin x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (1-2m)\sin x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\Delta = (1-2m)^2 - 8m + 8 = 4m^2 - 12m + 9 = (2m-3)^2.$$

Vậy

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \dfrac{(2m-1)-(2m-3)}{4} = \dfrac{1}{2} & (2) \\ \sin x = \dfrac{(2m-1)+(2m-3)}{4} = m-1. & (3) \end{array}\right.$$

• Giải (2), ta được

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right. \quad (4)$$

• Giải (3), với điều kiện $-1 \le m - 1 \le 1$ hay $0 \le m \le 2$, ta được

$$\sin x = m - 1 = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{array}\right. \quad (5)$$

Kết luận

a) Nếu $m < 0$ hoặc $m > 2$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm là (4).

b) Nếu $0 \le m \le 2$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm là (4) và (5).

5.28. Ta lập bảng sau đây

Δx	1	0,1	0,01
Δy	18	1,161	0,110601
dy	11	1,1	0,11
$\Delta = \lvert \Delta y - \mathrm{d}y \rvert$	7	0,061	0,000601
$\delta = \left\lvert \dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y} \right\rvert$	0,39	0,0526	0,0055

Chú ý. Qua bảng trên ta thấy, với Δx càng nhỏ thì sai số tuyệt đối của công thức gần đúng $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ là $\Delta = |\Delta y - \mathrm{d}y|$ càng nhỏ và sai số tương đối

$\delta = \left|\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}\right|$ cũng càng nhỏ.

5.29. $-0{,}0693$.

5.30. a) $-\dfrac{4\mathrm{d}x}{x^3}$; b) $-\dfrac{m+n}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

c) $-\dfrac{6x^2\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}$; d) $\dfrac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$.

5.31. a) 0,99999.

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = \sqrt{x}$ với $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0{,}00002$.

b) $-0{,}00002$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = \sin x$ với $x_0 = 0$ và $\Delta x = -0{,}00002$.

5.32. a) $4(\cos 2x - x\sin 2x)$; b) $4\sin 2x$;

c) $y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x$; $y'' = 12x^2 - 18x + 2$;

$y''' = 24x - 18$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$ $(n \geq 5)$.

d) $\dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

e) Ta có

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

g) Chứng minh tương tự câu e), ta được :

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5.33. Ta có

$$\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x + B - A \equiv x - 5 \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2. \end{cases}$$

Vậy

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}.$$

Áp dụng công thức (xem bài tập 5.32 d)

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

ta được

$$f^{(n)}(x) = 3\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - 2\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

5.34. a) Học sinh tự chứng minh.

b) Ta có

$y' = 2\cos 2x$; $\quad y'' = -2^2 \sin 2x$;

$y''' = -2^3 \cos 2x$; $\quad y^{(4)} = 2^4 \sin 2x$;

$y^{(5)} = 2^5 \cos 2x$; $\quad y^{(6)} = -2^6 \sin 2x$;

$y^{(7)} = -2^7 \cos 2x$; $\quad y^{(8)} = 2^8 \sin 2x$.

. . .

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} \sin 2x = (-1)^n 2^{2n} y .$$

5.35. a) $t = 7\text{s}$; b) $v(3) = 8\text{m/s}$; $a(3) = -2\text{m/s}^2$.

5.36. (D).

5.37. (C).

5.38. (B).

5.39. (C).

5.40. Theo định nghĩa, ta có

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Vì $f(0) = 0$ nên

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A.$$

5.41. a) Hàm số liên tục tại điểm $x = 0$ nếu $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ hay

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^3 + bx + c) = c,$$

$$f(0) = 0^2 = 0.$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x = 0$ nếu $c = 0$ còn b tuỳ ý.

b) Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0$ thì nó liên tục tại điểm đó (suy ra $c = 0$) và có giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}. \qquad (1)$$

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3 + bx}{x},$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x^2) + \lim_{x\to 0^+} b = b.$$

Để tồn tại giới hạn hữu hạn (1) thì ta phải có

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Suy ra $b=0$.

Vậy hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi $b=c=0$. Khi đó, ta có $f'(0)=0$.

5.42. a) Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=mx^3-(m+2)x^2+5x-3.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow mx^3-(m+2)x^2+5x-3=0. \qquad (1)$$

Thử thấy $x=1$ là một nghiệm, nên ta có thể viết (1) dưới dạng

$$(x-1)(mx^2-2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (2a)\\ mx^2-2x+3=0. & (2b)\end{array}\right.$$

Ta hãy giải phương trình (2b). Xét hai trường hợp

- Với $m=0$ thì (2b) $\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$;
- Với $m\neq 0$ thì

$$(2b) \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-3m}}{m} \quad \left(\textit{với điều kiện } 0\neq m\leq\frac{1}{3}\right).$$

Kết luận

\+ Với $m>\dfrac{1}{3}$, phương trình có nghiệm $x_0=1$.

\+ Với $m=0$, phương trình có nghiệm $x_0=1$ và $x_1=\dfrac{3}{2}$.

\+ Với $0\neq m\leq\dfrac{1}{3}$, phương trình có các nghiệm là

$$x_0=1,\ x_1=\frac{1-\sqrt{1-3m}}{m} \text{ và } x_2=\frac{1+\sqrt{1-3m}}{m}.$$

b) Để hàm số đã cho có đạo hàm thì ta phải có

$$x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ hoặc } x>4.$$

Với điều kiện $x < -2$ hoặc $x > 4$, ta có

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}.$$

Phương trình

$$f(x).f'(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 4 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}}.\sqrt{x^2-2x-8} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 4 \\ x - 1 = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1+m \\ 1+m < -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1+m \\ 1+m > 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1+m \\ m < -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1+m \\ m > 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+m \\ |m| > 3. \end{cases}$$

Kết luận

+ Với $|m| \le 3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Với $|m| > 3$ thì phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1 + m$.

5.43. Vì $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ nên $\cos x \ne 0$. Xét hai trường hợp

+ Nếu $\cos x > 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$$

suy ra

$$f'(x) = -\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\tan x = \frac{\tan x}{|\cos x|}. \qquad (1)$$

+ Nếu $\cos x < 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{|\cos x|} = -\frac{1}{\cos x}$$

Suy ra

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x}.\tan x = \frac{\tan x}{|\cos x|}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f'(x) = \dfrac{\tan x}{|\cos x|}$ $\left(x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$.

5.44. Ta nhận thấy

$$2a-1-a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=1.$$

Vậy :

• Khi $a \neq 1$ thì không tồn tại hàm số $f(x)$ với bất kì $x \in \mathbb{R}$, do đó không tồn tại $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

• Khi $a=1$ thì tồn tại hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$f(x)=4x^3-6x^2\cos 2+3x\sin 2\sin 6.$$

Ta có $\quad f'(x)=12x^2-12x\cos 2+3\sin 2\sin 6$;

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3-6\cos 2+3\sin 2\sin 6=3(1-2\cos 2+\sin 2\sin 6).$$

Vì $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ nên $\cos 2<0,$ suy ra $1-2\cos 2>1.$ (1)

Mặt khác $|\sin 2\sin 6| \leq 1,$ suy ra $\sin 2\sin 6 \geq -1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$1-2\cos 2+\sin 2\sin 6>0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)>0.$$

5.45. Để đồ thị hàm số

$$y=4x^3-3x$$

tiếp xúc với đường thẳng $y=mx-1$ thì ta phải tìm m sao cho hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} 4x^3-3x=mx-1 & (1) \\ 12x^2-3=m & (2) \end{cases}$$

có nghiệm. Thế m từ (2) vào (1), ta được

$$4x^3-3x=(12x^2-3)x-1 \Leftrightarrow 8x^3=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (2) ta được $m=0$. Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y=mx-1$.

5.46. Hoành độ giao điểm hai đồ thị của hai hàm số đã cho là

$$\frac{1}{x\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Tung độ giao điểm tương ứng là y = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có :

- $$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{2}.x^2},\text{ suy ra } f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại giao điểm là $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$.

- $g'(x)=x\sqrt{2}$, suy ra $g'(1)=\sqrt{2}$;

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = g(x) tại giao điểm là $y=\sqrt{2}(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay $y=\sqrt{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $f'(1).g'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=-1$

nên hai tiếp tuyến của hai đồ thị hàm số đã cho vuông góc với nhau, suy ra góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 90°.

5.47. Nếu chọn trục Os trùng với phương của chuyển động và chiều dương là chiều của chuyển động, gốc O là vị trí ban đầu trước khi tàu khởi hành và xem $t=0$ là thời điểm tàu bắt đầu khởi hành, thế thì phương trình chuyển động của đoàn tàu là

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}.(0,1)t^2.$$

(s là quãng đường đi được, a là gia tốc).

Gọi t_0 ($t_0>0$) là khoảng thời gian từ lúc đoàn tàu rời ga đến khi đi được 500m, ta có

$$500=\frac{1}{2}.(0,1)t_0^2 \Leftrightarrow t_0=100\,(\mathrm{s}).$$

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm tàu đã đi được đúng 500m là

$$v(t_0)=v(100)=0,1\times 100=10\ (\mathrm{m/s}).$$

5.48. Ta viết đa thức bậc ba $P(x)$ dưới dạng

$$P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \qquad (a_0\neq 0).$$

Ta có

$$P'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2 \ ;$$
$$P''(x) = 6a_0x + 2a_1 \ ;$$
$$P'''(x) = 6a_0 .$$

Vậy

$$\frac{x^3}{6}P'''(\alpha) + \frac{x^2}{2}P''(\alpha) + xP'(\alpha) + P(\alpha)$$
$$= a_0x^3 + (3a_0\alpha + a_1)x^2 + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 . \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$P(x+\alpha) = a_0(x+\alpha)^3 + a_1(x+\alpha)^2 + a_2(x+\alpha) + a_3$$
$$= a_0(x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3) + a_1(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) + a_2(x+\alpha) + a_3$$
$$= a_0x^3 + (3a_0\alpha + a_1)x^2 + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 . \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

b) Khi $\alpha = 0$, ta được

$$P(x) = P(0) + xP'(0) + \frac{x^2}{2}P''(0) + \frac{x^3}{6}P'''(0).$$

Vì

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1$$

nên đa thức phải tìm là

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

5.49. a) $f'(-2) = 1$; $f'(0) = -2$; $f'(2) = 0$.

b) Với mọi $x \in (0 ; 2)$, ta nhận thấy tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại các điểm $M(x ; f(x))$ đi từ góc phần tư thứ hai đến góc phần tư thứ tư, do đó hệ số góc của tiếp tuyến là số âm, suy ra $f'(x) < 0$.

5.50. Để hàm số có đạo hàm thì ta phải có

$$x - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}.$$

Với điều kiện $0 < x < \frac{1}{4}$, ta có

$$y' = \frac{1-8x}{4\sqrt{x-4x^2}} .$$

Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm tuỳ ý thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$; ta có $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}$,

$y'(x_0) = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ là

$$y = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}(x - x_0) + \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}.$$

Tiếp tuyến này cắt trục tung tại điểm T có tung độ là

$$y_T = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}(0 - x_0) + \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}$$

$$= \frac{(1-8x_0)(-x_0) + 2(x_0 - 4x_0^2)}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}} = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}} > 0.$$

Khoảng cách TM_0 được tính bởi công thức

$$|TM_0|^2 = (x_0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}\right)^2$$

$$= x_0^2 + \left(\frac{2(x_0 - 4x_0^2) - x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}\right)^2 = x_0^2 + \frac{(x_0 - 8x_0^2)^2}{16(x_0 - 4x_0^2)}$$

$$= \frac{16x_0^3 - 64x_0^4 + x_0^2 - 16x_0^3 + 64x_0^4}{16(x_0 - 4x_0^2)} = \frac{x_0^2}{16(x_0 - 4x_0^2)}.$$

Vậy

$$|TM_0| = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}} = |TO| = y_T .$$

Điều này chứng tỏ, điểm T cách đều tiếp điểm M_0 và gốc toạ độ O.

Chú ý. Có thể chứng minh bài toán này bằng phương pháp hình học như sau :

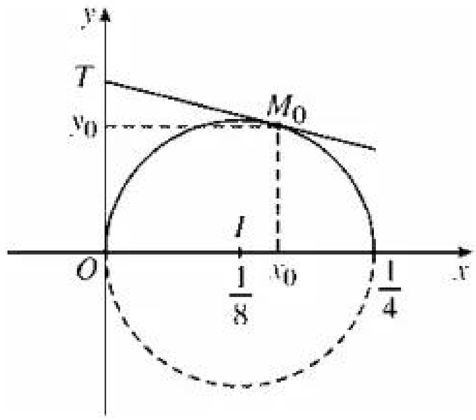
Với $0 \le x \le \frac{1}{4}$ thì $y \ge 0$ và ta có

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2} \Leftrightarrow 4y^2 + 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{4} + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

Vậy đồ thị $(\mathscr{C})$ là phần đường tròn thuộc góc phần tư thứ nhất (vì $x \geq 0$ và $y \geq 0$) tâm $I\left(\frac{1}{8} ; 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{8}$ (h.5.6).

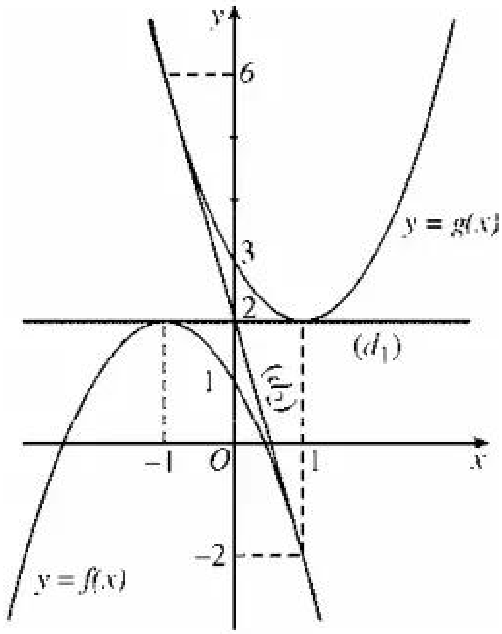
Áp dụng tính chất : từ một điểm T ngoài đường tròn, kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn là TM_0 và TO và ta có $|TM_0| = |TO|$. Đó là điều phải chứng minh.



Hình 5.6

5.51. a) Học sinh tự vẽ (h.5.7)

b) Gọi đường thẳng $y = mx + p$ (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$ tại điểm $A(a ; f(a))$, đồng thời là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $B(b ; g(b))$. Nếu thế thì ta phải có



Hình 5.7

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} f'(a) = g'(b) = m & (1) \\ f(a) = ma + p & (2) \\ g(b) = mb + p & (3) \end{cases}$$

((1) chứng tỏ hệ số góc của tiếp tuyến tại A (đối với $(\mathscr{P})$ và hệ số góc của tiếp tuyến tại B (đối với $(\mathscr{P}')$) bằng nhau và bằng m ; (2) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua A ; (3) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua B).

Khử m và p ở hệ phương trình (I), ta được

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - af'(a) = g(b) - bg'(b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a+1) = 2(b-1) \\ -a^2 - 2a + 1 + 2a(a+1) = b^2 - 2b + 3 - 2b(b-1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \; ; \; b = 1 \\ a = 1 \; ; \; b = -1. \end{array}\right.$

Thế vào (I) ta được

• Với $a = -1$; $b = 1$ thì $m = 0$ và $p = 2$, suy ra tiếp tuyến chung phải tìm là $y = 2$ (d_1).

• Với $a = 1$, $b = -1$ thì $m = -4$ và $p = 2$, suy ra tiếp tuyến chung phải tìm là $y = -4x + 2$ (d_2).

5.52. Ta có

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n.$$

Áp dụng công thức tổng của cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = x \neq 1$ ta được :

$$f'(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Từ đó suy ra

a) $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1}(1 + x + x^2 + ... + x^n) = n + 1.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$ (vì $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$).

d) $\lim\limits_{n \to \infty} f'(3) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1) = +\infty$

(vì $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{n+1} = +\infty$).