

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

ĐỀ BÀI

1. Giải phương trình

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$$

2. Biết $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Chứng minh rằng hàm số

$$y = (\sqrt{5}-1) \sin x + \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cos x$$

đồng biến trên $\left(\frac{-9\pi}{10}; \frac{\pi}{10} \right)$.

3. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{5} \right) = 1 + \cos^2 \frac{\pi}{5}.$$

4. Giải các phương trình sau :

- a) $\cos 2x - 9 \cos x + 5 = 0$; b) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$;
c) $2\tan^4 x - 3\tan^2 x + 1 = 0$; d) $\tan x \tan 2x = \tan x + \tan 2x$;
e) $5\cos 2x - 12\sin 2x = 13$; f) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

5. Cho hàm số $f(x) = 2\sin x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$;
b) Giải phương trình $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) Tính giá trị gần đúng (chính xác đến hàng phần nghìn) của các nghiệm nằm trong khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Giải các phương trình sau

- a) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$; b) $2\cos^2 \frac{x}{2} (1 - \sin x) + \cos^2 x = 0$;
c) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) + 1$;
d) $3 \tan 2x - 4 \tan 3x = \tan 2x \tan^2 3x$.

7. An có 12 cuốn sách tham khảo khác nhau, trong đó có 6 cuốn sách toán, 4 cuốn sách vật lí và 2 cuốn sách hoá học. An muốn xếp chúng vào 3 ngăn A, B, C trên giá sách sao cho mỗi ngăn chứa một loại sách. Hỏi An có bao nhiêu cách xếp ?

8. Trong khai triển của $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$, hãy tìm số hạng tự do (tức là số hạng không chứa x).
9. Hãy chọn phương án đúng trong các phương án sau đây :
Một hộp chứa 12 thẻ, trong đó có 2 thẻ ghi số 1 ; 4 thẻ ghi số 5 và 6 thẻ ghi số 10. Chọn ngẫu nhiên 6 thẻ. Khi đó, xác suất để các số ghi trên 6 thẻ được chọn có tổng số không nhỏ hơn 50 là
(A) $\frac{37}{924}$; (B) $\frac{99}{924}$; (C) $\frac{127}{924}$; (D) $\frac{132}{924}$.
10. Trong kì thi cuối năm lớp 11, xác suất để Bình đạt điểm giỏi môn toán là 0,92 ; môn Văn là 0,88.
a) Tính xác suất để Bình đạt điểm giỏi cả hai môn Văn và Toán.
b) Tính xác suất để Bình đạt điểm giỏi ít nhất một môn.
11. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số nguyên $n \geq 2$ và mọi số thực x thoả mãn $|x| < 1$:
- $$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$
12. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của bốn số đó bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.
13. Ba số có tổng bằng $\frac{148}{9}$ và lập thành một cấp số nhân. Theo thứ tự đó, ba số ấy đồng thời là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.
14. Dãy số (u_n) được cho bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 2u_n - 1$ với mọi $n \geq 1$.
a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) , trong đó $v_n = u_n - 1$ là một cấp số nhân. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.
b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
c) Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .
15. Tìm các giới hạn sau :
- a) $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 - n}}{2n-1} + \frac{2^n \cos n}{3^n} \right);$ b) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n} + \sqrt[3]{8n^3 + n^2}}{2n+3};$
c) $\lim (2^n - 2n + 3);$ d) $\lim \left(\sqrt{n^4 + 2n^2} - n^2 \right).$
16. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a . Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy.

- a) Tính độ dài cạnh của tam giác đều thứ n .
 b) Tính tổng các chu vi của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$
 c) Tính tổng diện tích của các tam giác đều đó.

17. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^4 - 8}{x^3 - 2\sqrt{2}}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{(2x-1)(2x+3)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{(x-2)(x^2-x-2)}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{4x-9}}{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}$.

18. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(3; 5)$, liên tục tại điểm $x = 4$ và thoả mãn $2 \leq f(x) \leq x^2 - 8x + 18$ với mọi $x \in (3; 5)$.

Tìm giá trị của hàm số f tại điểm $x = 4$.

19. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5 + x^2}{x^2 + x} & \text{với } x \neq 1 \text{ và } x \neq 0 \\ -3 & \text{với } x = -1 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

liên tục trên \mathbb{R} .

20. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$;

b) $y = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{\sqrt{3x^2 + 1}}$;

c) $y = \cos^3 2x - \sin^2 3x$;

d) $y = \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2$;

e) $y = \sqrt{\cot(x^2 + 1)}$;

f) $y = \sqrt{\frac{\cos x}{1 - \sin x}}$.

21. Chứng minh rằng đối với hàm số $y = x \sin x$, ta có

$$xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0.$$

22. Một chuyển động thẳng có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2$.

Chứng minh rằng gia tốc của chuyển động đó dương tại mọi thời điểm.

