§1 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu rằng các kết quả về vectơ đã được trình bày trong Hình học phẳng vẫn còn đúng trong không gian.
2. Nắm được khái niệm ba vectơ đồng phẳng ; điều kiện đồng phẳng của ba vectơ và biết biểu thị một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng.
3. Giải được một số bài toán về vectơ và biết áp dụng vectơ vào việc giải một số bài toán hình học không gian.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Vectơ trong không gian được đưa vào sau khi đã có kiến thức về quan hệ song song. Từ đó, khái niệm về vectơ và các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn như trên mặt phẳng. Các tính chất của chúng cũng được chứng minh tương tự như trong mặt phẳng. Vì thế, nội dung của phần này chỉ được đề cập dưới dạng hoạt động hoặc ví dụ và sau đó là một số bài tập luyện tập.
2. Cái mới của bài này là khái niệm ba vectơ đồng phẳng và biểu thị một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng. Tính duy nhất của các số m, n, p trong biểu diễn một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng được giải thích cụ thể như sau :

   Giả sử $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ và $\vec{d} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$.

Khi đó ta có $(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} + (p - p')\vec{c} = \vec{0}$. Do ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên áp dụng kết quả 2) của hoạt động 5, ta có $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$.

Cần lưu ý áp dụng kết quả biểu thị $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ khi ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng và $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương vào việc chứng minh bốn điểm đồng phẳng hoặc chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng hay đường thẳng nằm trong một mặt phẳng.

3. Kiến thức về tích vô hướng của hai vectơ được sử dụng nhiều trong phần quan hệ vuông góc.

4. Dùng tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể chứng minh nhiều tính chất hình học một cách đơn giản. Chúng tôi xin nêu một vài ví dụ :

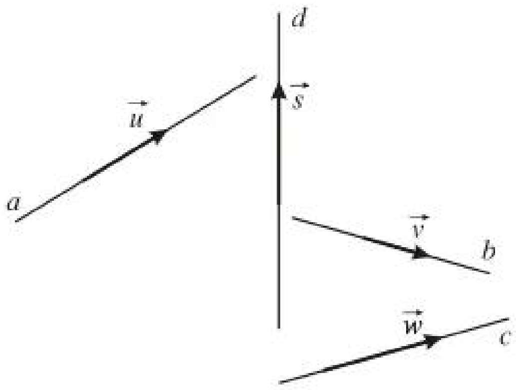
Tính chất 1. Nếu ba đường thẳng a, b, c cùng vuông góc với một đường thẳng d thì a, b, c cùng song song với một mặt phẳng.

Chứng minh (h.80). Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a, b, c, d.

Theo giả thiết thì $\vec{u}.\vec{s} = \vec{v}.\vec{s} = \vec{w}.\vec{s} = 0$. Ta chỉ cần chứng minh $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

Thật vậy, nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng thì có thể viết

$$\vec{s} = m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w}.$$



Hình 80

Khi đó $\vec{s}^2 = (m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w}).\vec{s} = 0$, suy ra $\vec{s} = \vec{0}$, vô lí. Vậy, a, b, c cùng song song với một mặt phẳng.

Từ tính chất trên, ta suy ra :

a) Các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

b) Các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng và cùng đi qua một điểm thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

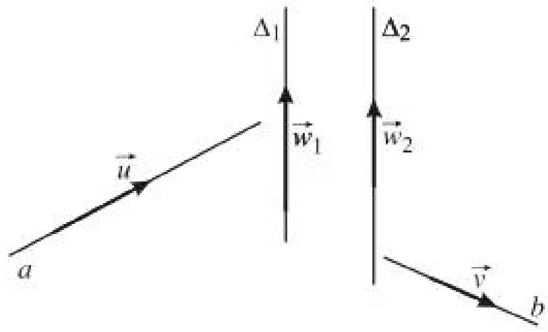
Tính chất 2. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và không song song. Khi đó, các đường thẳng vuông góc với cả a và b thì song song với nhau.

Chứng minh (h.81)

Gọi Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với cả a và b.

Kí hiệu $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a, b, Δ_1, Δ_2. Theo giả thiết :

$\vec{u}.\vec{w}_1 = \vec{v}.\vec{w}_1 = \vec{u}.\vec{w}_2 = \vec{v}.\vec{w}_2 = 0.$



Hình 81

Trước hết, ta thấy rằng ba vectơ $\vec{w}_1$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ không đồng phẳng.

Thật vậy, nếu chúng đồng phẳng thì vì $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương nên ta có

$$\vec{w}_1 = m\vec{u} + n\vec{v},$$

do đó $$\vec{w}_1^2 = (m\vec{u} + n\vec{v})\vec{w}_1 = 0,$$

suy ra $\vec{w}_1 = \vec{0}$, vô lí.

Vậy $\vec{w}_1$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ không đồng phẳng, từ đó ta có các số x, y, z sao cho

$$\vec{w}_2 = x\vec{w}_1 + y\vec{u} + z\vec{v}$$

hay $$\vec{w}_2 - x\vec{w}_1 = y\vec{u} + z\vec{v}.$$

Suy ra

$$(\vec{w}_2 - x\vec{w}_1)^2 = (y\vec{u} + z\vec{v})(\vec{w}_2 - x\vec{w}_1) = 0$$

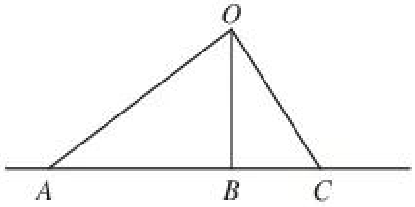
hay $\vec{w}_2 - x\vec{w}_1 = \vec{0}$, tức là $\vec{w}_2 = x.\vec{w}_1$.

Vậy $\vec{w}_1$ và $\vec{w}_2$ cùng phương, do đó Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

5. Thông qua một số ví dụ và bài toán, giáo viên cần giúp học sinh thấy được vectơ và các phép toán vectơ có vai trò nhất định trong việc giải một số bài toán hình học không gian. Sau đây là một số gợi ý mà giáo viên cần lưu ý học sinh khi giải toán.

1) Để chứng minh ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, hoặc có thể chọn điểm O nào đó để chứng minh $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$ với $k + l = 1$.

Nội dung cuối cùng nêu trên được giải thích như sau : Điểm C thuộc đường thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = m(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (1 - m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$. Đặt $k = 1 - m$, $l = m$ thì $k + l = 1$ (h.82).



Hình 82

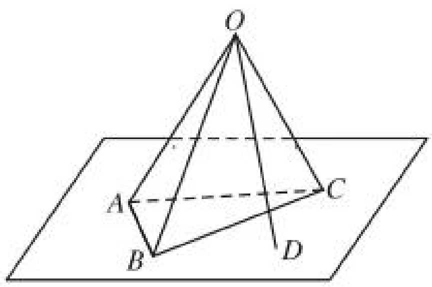
2) Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D thuộc một mặt phẳng, ta có thể chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng tức là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} + l\overrightarrow{AD}$, hoặc chứng minh rằng $p_1\overrightarrow{AB} + p_2\overrightarrow{AC} + p_3\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ với $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 0$ (xem hoạt động 6, §1, SGK). Chú ý rằng ta cũng có thể chứng minh A, B, C, D đồng phẳng bằng cách chọn điểm O nào đó và chứng minh $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$ với $k + l + m = 1$ (xem BT6, chương III, SGK). Điều đó được giải thích như sau (xét trường hợp A, B, C không thẳng hàng) :

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên : điểm D thuộc mặt phẳng (ABC) khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$$

hay $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = p(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + q(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$

hay $\overrightarrow{OD} = (1 - p - q)\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC}$.



Hình 83

Đặt $1 - p - q = k$, $p = l$, $q = m$ thì $k + l + m = 1$ (h.83).

3) Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau, ta cần chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương. Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc đường thẳng CD hoặc ngược lại thì AB và CD là hai đường thẳng song song (xem bài toán 3, §1, SGK ; BT3, chương III, SGK).

4) Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P), ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, sau đó chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng. Khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với mp(P) (xem BT4, chương III, SGK).

III – HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1 (Chỉ xét những cặp điểm đã được nối với nhau)

a) • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$.

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

• $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD'}$, $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB'}$.

• $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}$ mà $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ nên

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

Chú ý. Cũng có thể tìm thấy kết quả trên nhờ việc nhận xét $ACC'A'$ và $ABCD$ là các hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C}$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{D'D}$ nên

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'D}.$$

2

• $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{HN}$;

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{JN}$;

$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{KN}$;

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{HJ}$.

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}$; $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KD}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;

$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GN}$; $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$; $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GJ}$.

• Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$;

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$;

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AG}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$.

3

1) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2) Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'})$$

$$= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

4

Dễ thấy $MP \parallel QN$ (vì cùng song song với BC) nên các đường thẳng MP, MN, MQ cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt khác, do $BC \parallel MP$ nên từ M vẽ vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$ thì vectơ đó nằm trên đường thẳng MP. Tương tự như trên, từ M vẽ vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$ thì vectơ ấy nằm trên đường thẳng MQ. Vậy các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

5

1) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng. Thật vậy, giả sử $m \neq 0$, từ đó ta có $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}$. Đẳng thức này khẳng định ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

2) Mệnh đề này tương đương với mệnh đề ở câu 1).

6

1) Từ $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ ta có $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MD})$, từ đó $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$.

2) Cộng các vế của hai đẳng thức trên, ta có

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{1-k}[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})].$$

Mặt khác $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ (do M và N là trung điểm của AB và CD). Do đó

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}.$$

Vậy M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

1. a) *Cách 1.* Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$, chẳng hạn $\vec{a} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng

$$1.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}.$$

Cách 2. Từ điểm O tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì A trùng với O. Như vậy các điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng, tức là ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

b) *Cách 1.* Nếu hai trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương, chẳng hạn $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thì $\vec{b} = k\vec{c}$ (ta xét $\vec{c} \neq \vec{0}$, vì nếu $\vec{c} = \vec{0}$ thì theo câu a), ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng). Khi đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng :

$$0.\vec{a} + 1.\vec{b} - k.\vec{c} = \vec{0}.$$

Cách 2. Nếu $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là hai vectơ cùng phương, từ điểm O tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì hai đường thẳng OB và OC trùng nhau. Khi đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng, tức là ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

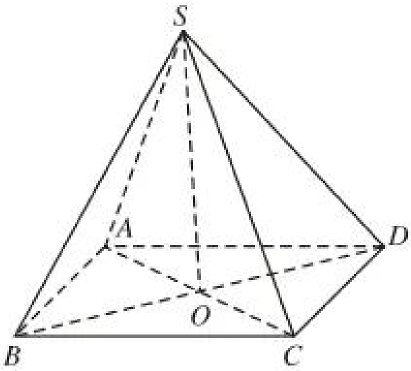
2. (h.84) a) Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
Vậy với hình chóp $S.ABCD$ thì $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Cách 1. Do O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$ nên $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OB}$. Vậy (*) $\Leftrightarrow$ $(1+k)\overrightarrow{OA} + (1+m)\overrightarrow{OB} = \vec{0}$. Mặt khác $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là hai vectơ không cùng phương nên đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{cases} 1+k=0 \\ 1+m=0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} k=-1 \\ m=-1. \end{cases}$$



Hình 84

Điều này có nghĩa O là trung điểm của AC và BD, tức là $ABCD$ là hình bình hành. Vậy, với hình chóp $S.ABCD$ và O là giao điểm của AC và BD thì $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Cách 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}.$$

Vậy (*) tương đương với $2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \vec{0}$, điều này chứng tỏ O, M, N thẳng hàng. Mặt khác M thuộc AC, N thuộc BD và O là giao điểm của AC và BD nên O, M, N thẳng hàng chỉ xảy ra khi $O \equiv M \equiv N$, tức O là trung điểm của AC và BD, hay $ABCD$ là hình bình hành.

Vậy với hình chóp $S.ABCD$ và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD thì $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

3. (h.85) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ thì

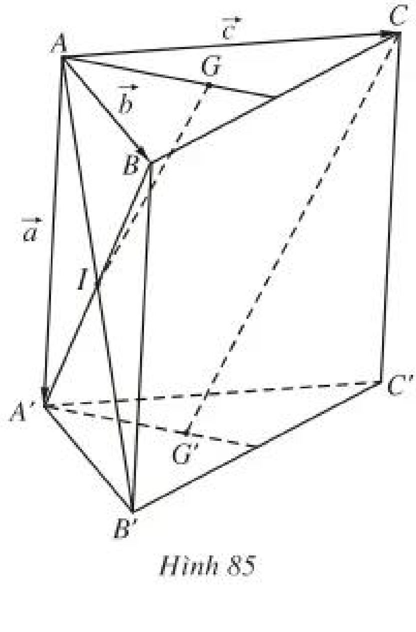
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}), \ \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Do đó $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}$.

Mặt khác

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'})$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$$



Hình 85

$$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c}$$

$$= \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3}.$$

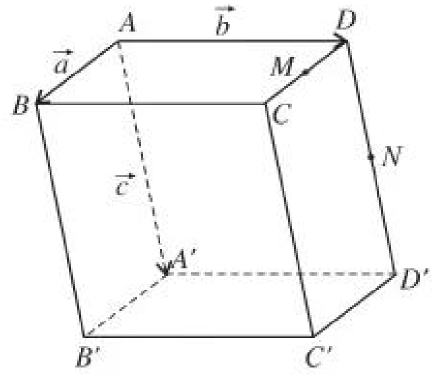
Từ đó $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI}$. Ngoài ra điểm G không thuộc đường thẳng CG'. Vậy GI và CG' là hai đường thẳng song song.

4. (h.86) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Vì G' là trọng tâm của tứ diện $BCC'D'$ nên

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$$

và G là trọng tâm của tứ diện $A'D'MN$ nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}).$$



Hình 86

Từ đó

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{8}(5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}).$$

Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng. Mặt khác, G không thuộc mặt phẳng $(ABB'A')$ nên đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

5. (h.87) a) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có

$$\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

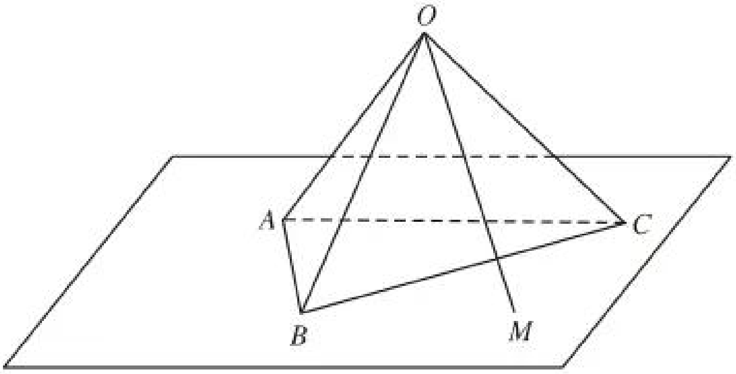
hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ với mọi điểm O

tức là $\overrightarrow{OM} = (1 - l - m)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$.

Đặt $1 - l - m = x$, $l = y$, $m = z$ thì

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

với $x + y + z = 1$.



Hình 87

b) Từ

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

với $x + y + z = 1$, ta có

$$\overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

hay $$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

tức là $$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

mà $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên M thuộc mặt phẳng (ABC).

Chú ý. Kết quả trên chứng tỏ x, y, z không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.

6. Vì A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$ nên

$$\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'},\ \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'},\ \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}.$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right),$$

vậy $$\overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}.$$

Mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng, nên theo bài tập 5 nêu trên, điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1$, tức là $a + b + c = 3$.