

## §2

## HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### I – MỤC TIÊU

Làm cho HS nắm được :

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt : chéo nhau, cắt nhau và song song.
2. Các tính chất của hai đường thẳng song song và định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.
3. Cách chứng minh hai đường thẳng song song ; ngoài ra biết được khái niệm trọng tâm của tứ diện để vận dụng trong bài tập.

### II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LUU Ý

1. Khi nói đến hai đường thẳng song song, học sinh thường không để ý đến điều kiện là hai đường thẳng đó phải đồng phẳng mà chỉ nhớ điều kiện chúng không có điểm chung. Do đó, giáo viên cần làm rõ những tính chất giống nhau và tính chất khác nhau của hai đường thẳng song song và hai đường thẳng chéo nhau.

2. Ta có thể chứng minh tính chất 1 như sau :

Giả sử  $A$  là một điểm nằm ngoài đường thẳng  $a$  cho trước. Theo tiên đề O-clít về đường thẳng song song thì trong  $\text{mp}(A, a)$  có duy nhất đường thẳng  $b$  đi qua  $A$  và song song với  $a$ .

Hiển nhiên nếu một đường thẳng đi qua  $A$  và không nằm trên  $\text{mp}(A, a)$  thì không thể song song với  $a$ . Vậy đường thẳng  $b$  là duy nhất.

3. Trong các sách giáo khoa trước đây, tính chất 2 được đặt sau định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng. Đó là điều hợp lí vì để chứng minh "tính chất 2", người ta phải dùng đến định lí nói trên. Nhưng "tính chất 2" là một tính chất rất quen thuộc đối với học sinh vì các em đã học nó trong hình học phẳng, bởi vậy chúng tôi xếp tính chất này lên trên định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng và coi nó như một tính chất hiển nhiên không cần chứng minh. Thật ra ta có thể chứng minh trực tiếp tính chất đó mà chỉ cần đến tính chất 1. Cách chứng minh đó như sau :

Giả sử có ba đường thẳng  $a, b, c$ , trong đó  $b \neq c$ ,  $b // a$  và  $c // a$ .

Nếu  $\text{mp}(a, b)$  trùng với  $\text{mp}(a, c)$  thì theo hình học phẳng ta có  $b // c$ .

Nếu  $\text{mp}(a, b)$  khác  $\text{mp}(a, c)$ , lấy một điểm  $C$  trên  $c$  và gọi  $c'$  là giao tuyến của  $\text{mp}(C, b)$  và  $\text{mp}(a, c)$ .

i) Nếu  $c' // a$  thì  $c'$  phải trùng với  $c$  (tính chất 1). Khi đó  $c // b$ , vì nếu  $c$  cắt  $b$  tại điểm  $I$  thì  $I \in \text{mp}(a, c)$  và  $I \in \text{mp}(a, b)$ , suy ra  $I$  phải thuộc đường thẳng  $a$  là giao tuyến của  $\text{mp}(a, c)$  và  $\text{mp}(a, b)$ . Vậy  $b$  và  $a$  cắt nhau tại  $I$  (trái với  $b // a$ ).

ii) Nếu  $c'$  cắt  $a$  tại một điểm  $J$  thì khi đó  $J$  vừa thuộc  $\text{mp}(C, b)$  lại vừa thuộc  $\text{mp}(a, b)$  suy ra  $J$  thuộc giao tuyến  $b$  của  $\text{mp}(C, b)$  và  $\text{mp}(a, b)$ , tức  $a$  và  $b$  cắt nhau tại  $J$  (trái với giả thiết).

Tóm lại ta có  $b // c$  (điều phải chứng minh).

### III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

?1 a) Đường thẳng  $a$  và đường thẳng  $b$  không cùng nằm trên một mặt phẳng.

b) Có.

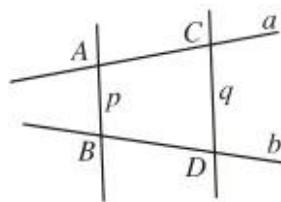


1 Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  chéo nhau. Vì nếu chúng không chéo nhau thì có một  $\text{mp}(P)$  chứa  $AB$  và  $CD$ ; từ đó  $\text{mp}(P)$  chứa bốn điểm  $A, B, C, D$ . Vậy  $ABCD$  không phải là tứ diện (trái với giả thiết).



2

Giả sử  $p$  cắt  $a$  và  $b$  tại  $A$  và  $B$ ;  $q$  cắt  $a$  và  $b$  tại  $C$  và  $D$  (h.42). Nếu  $p \parallel q$  thì có  $\text{mp}(p, q)$  chứa bốn điểm  $A, C, B, D$ . Vì  $A$  và  $C$  đều thuộc  $\text{mp}(p, q)$  nên đường thẳng  $a$  thuộc  $\text{mp}(p, q)$ . Lí luận tương tự  $b$  cũng thuộc  $\text{mp}(p, q)$ . Từ đó suy ra  $a$  và  $b$  đồng phẳng (trái giả thiết). Vậy không có hai đường thẳng  $p, q$  song song với nhau và cắt cả  $a, b$ .



Hình 42

- [?2]**  $a$  và  $b$  cắt nhau hoặc song song với nhau (vì  $a$  và  $b$  phân biệt, đồng thời cùng nằm trên  $\text{mp}(R)$ ).



3

Rõ ràng ba đường thẳng phân biệt  $a, b, c$  đối một đồng phẳng.

Nếu không có hai đường thẳng nào trong chúng cắt nhau thì  $a, b, c$  đối một song song.

Nếu có hai đường thẳng cắt nhau, chẳng hạn  $a$  và  $b$  thì giao điểm của chúng nằm trên  $c$  (xem BT 4, chương II, SGK). Vậy  $a, b, c$  đồng quy.



4

Giả sử  $a \parallel b$ ,  $a \subset (P)$ ,  $b \subset (Q)$  và  $(P) \cap (Q) = c$ . Gọi  $(R) = \text{mp}(a, b)$ . Khi đó  $(P) \cap (Q) = c$ ,  $(Q) \cap (R) = b$ ,  $(R) \cap (P) = a$ . Vì  $a \parallel b$  và theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng nên  $c \parallel a$ ,  $c \parallel b$ . Giao tuyến  $c$  cũng có thể trùng với  $a$  hoặc  $b$  khi  $(P) \cap (Q) = a$  hoặc  $(P) \cap (Q) = b$ .

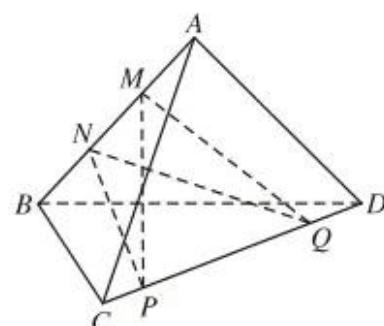
#### IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

17. Mệnh đề a) và mệnh đề d) đúng.

18. (h.43) Hai đường thẳng  $MQ$  và  $NP$  chéo nhau.

Thật vậy, giả sử chúng không chéo nhau, tức chúng cùng thuộc một  $\text{mp}(\alpha)$  nào đó. Vậy  $M, N, P, Q$  cùng thuộc  $\text{mp}(\alpha)$  và do đó  $A, B, C, D$  cùng thuộc  $\text{mp}(\alpha)$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết  $ABCD$  là một tứ diện.

Chứng minh tương tự, hai đường thẳng  $MP$  và  $NQ$  cũng chéo nhau.



Hình 43

19. (h.44) a) Nếu  $P, Q, R, S$  đồng phẳng thì chúng cùng thuộc một mp( $\alpha$ ) nào đó. Xét ba mặt phẳng : mp( $\alpha$ ), mp( $ABC$ ), mp( $ACD$ ).

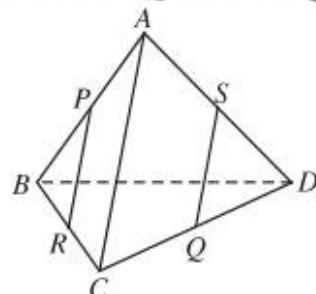
Ta có :  $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$ ,  $RS = (\alpha) \cap (ACD)$ ,  $AC = (ABC) \cap (ACD)$ . Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta suy ra  $PQ, AC, RS$  hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Ngược lại, nếu ba đường thẳng  $PQ, AC, RS$  hoặc đôi một song song hoặc đồng quy thì hai đường thẳng  $PQ$  và  $RS$  hoặc song song hoặc cắt nhau. Vậy hai đường thẳng  $PQ$  và  $RS$  cùng thuộc một mặt phẳng, từ đó bốn điểm  $P, Q, R, S$  đồng phẳng.

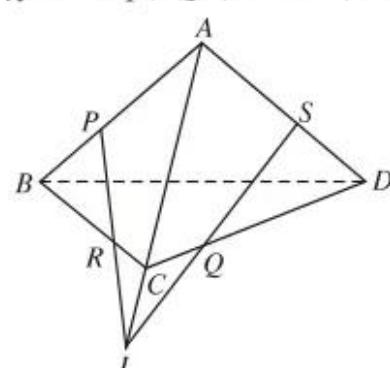
b) Chứng minh tương tự như câu a).

20. a) Trường hợp  $PR // AC$ .

Từ  $Q$  ta vẽ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AD$  tại  $S$ . Khi đó  $QS // PR$  nên bốn điểm  $P, Q, R, S$  đồng phẳng. Vậy  $S = \text{mp}(PQR) \cap AD$  (h.45).



Hình 45



Hình 46

b) Trường hợp  $PR$  cắt  $AC$  tại  $I$ .

Khi đó  $IQ = (PQR) \cap (ACD)$ . Đường thẳng  $IQ$  cắt  $AD$  tại  $S$ .

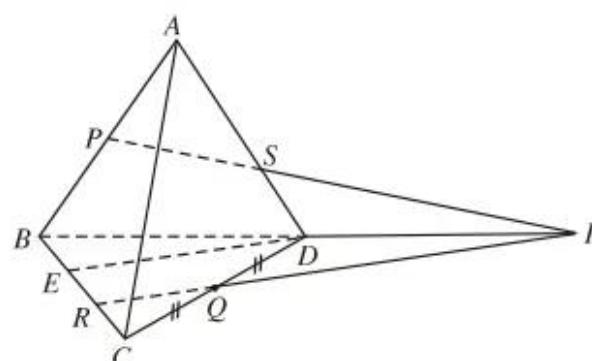
Vậy  $S = (PQR) \cap AD$  (h.46).

21. Xem hình 47.

Gọi  $I$  là giao điểm của  $RQ$  và  $BD$ ;  $E$  là trung điểm của  $BR$ . Khi đó  $EB = ER = RC$  và  $RQ // ED$ .

Tam giác  $BRI$  có  $ED // RQ$ , suy ra :

$$\frac{BD}{DI} = \frac{BE}{ER} = 1.$$



Hình 47

Vậy  $DB = DI$ . Do đó  $AD$  và  $IP$  là hai đường trung tuyến của tam giác  $ABI$ . Suy ra giao điểm  $S$  của  $AD$  và  $IP$  là trọng tâm của tam giác  $ABI$  và ta có  $AS = 2DS$ .

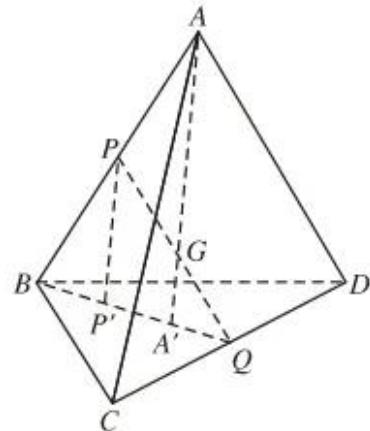
- 22.** (h.48). Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  thì trọng tâm  $G$  của tứ diện  $ABCD$  là trung điểm của  $PQ$ .

Giả sử đường thẳng  $AG$  cắt mp( $BCD$ ) tại  $A'$ . Ta phải chứng minh  $A'$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Rõ ràng  $A'$  thuộc đường trung tuyến  $BQ$  của tam giác  $BCD$ . Từ  $P$  ta kẻ  $PP' \parallel AA'$  ( $P' \in BQ$ ) thì  $PP'$  là đường trung bình của tam giác  $ABA'$ , còn  $GA'$  là đường trung bình của tam giác  $QPP'$ , tức là

$$BP' = P'A' = A'Q \quad (*)$$

$$\text{và} \quad AA' = 2PP', PP' = 2GA' \quad (**)$$

- a) Từ  $(*)$  suy ra  $A'$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ .  
 b) Từ  $(**)$  suy ra  $AA' = 4GA'$  hay  $GA = 3GA'$ .



Hình 48