§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được khái niệm góc giữa hai đường thẳng, đặc biệt là hai đường thẳng vuông góc.
2. Biết cách tính góc giữa hai đường thẳng và chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng nói chung không bằng góc giữa hai đường thẳng.
2. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể không cắt nhau, còn trong mặt phẳng hai đường thẳng như vậy luôn có điểm chung duy nhất.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

? Do $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$ nên SAB, SAC là các tam giác đều còn SBC, ABC là các tam giác vuông cân tại S và A.

1

Ta có $AC \parallel A'C'$, $A'C' \perp B'D'$ (do $A'B'C'D'$ là hình thoi) nên $AC \perp B'D'$.

2

Ta có

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}\ ; \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \qquad (2)$$

hay

$$k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ}. \qquad (2')$$

Từ (1) và (2') ta có

$$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} - k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CQ} - k\overrightarrow{DQ}.$$

Do $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ nên $(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}$.

Từ đó

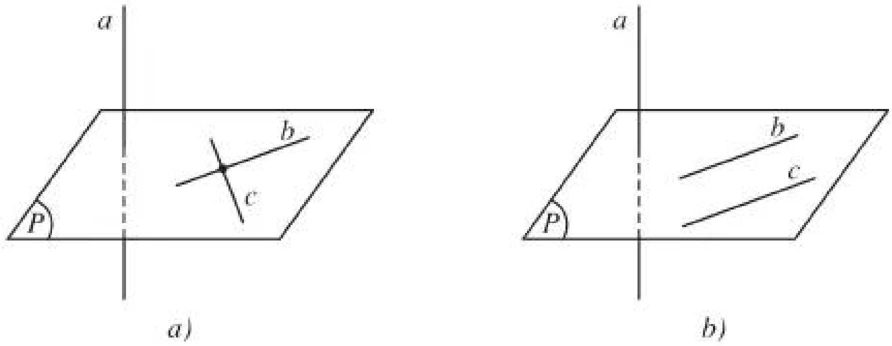
$$(1-k)\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}.$$

Mặt khác $AB \perp AC$ tức là $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$, $AB \perp BD$ tức là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Vậy $(1-k)\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$. Do $k \neq 1$ nên ta có $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$. Điều này khẳng định các đường thẳng AB và PQ vuông góc với nhau.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

7. a) Khẳng định "Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau" không đúng (h.88a, trong đó $a \perp (P)$).



Hình 88

b) Khẳng định "Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" không đúng (h.88b, trong đó $a \perp (P)$).

8. a) Nếu $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng thì ta có $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b}$, từ đó $\vec{n}.\vec{n} = (x\vec{a} + y\vec{b}).\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} = 0$, điều này mâu thuẫn với $\vec{n} \neq \vec{0}$.

b) Giả sử ba vectơ cùng vuông góc với $\vec{n}$ là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tức là $\vec{a}.\vec{n} = \vec{b}.\vec{n} = \vec{c}.\vec{n} = 0$.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ là ba vectơ không đồng phẳng (điều này suy ra từ câu a)). Khi đó $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$. Nhân vô hướng hai vế với $\vec{n}$, ta có $\vec{c}.\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} + z\vec{n}^2$, suy ra $z\vec{n}^2 = 0$ hay $z = 0$, tức là $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Vậy các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng vuông góc với một đường thẳng thì do kết quả nêu trên, ta có ba vectơ chỉ phương của ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng phẳng tức là ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng song song với một mặt phẳng.

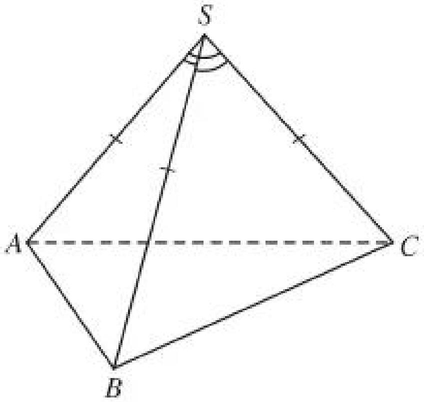
9. (h.89) Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}$. Do $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$ nên

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$= -SA.SB\cos\widehat{ASB} + SA.SC\cos\widehat{ASC}.$

Mặt khác $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$ nên $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$, tức là $SA \perp BC$.

Tương tự như trên ta cũng có $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.



Hình 89

10. Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD.$$

Tương tự, $\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AD \perp BC$;

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Như vậy, điều ngược lại cũng đúng.

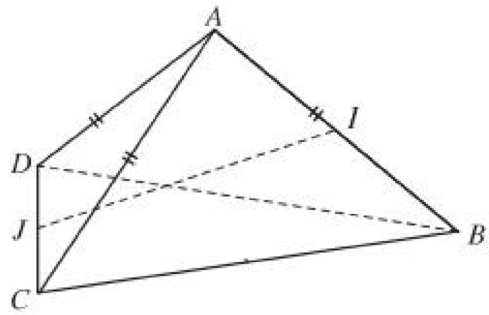
11. (h.90) a) Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|\cos\widehat{BAD} - |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos\widehat{BAC}.$

Do $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, tức là $AB \perp CD$.



Hình 90

b) Vì I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

Từ đó

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|\cos 60^{\circ} - \overrightarrow{AB}^2 + |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos 60^{\circ}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2 - a^2 + \frac{1}{2}a^2\right) = 0$$

(ở đó $AB = AC = AD = a$). Vậy $AB \perp IJ$.

Mặt khác

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}) = 0.$$

Vậy $CD \perp IJ$.