§3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ; biết cách chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và áp dụng vào giải một số bài toán.
2. Vận dụng thành thạo định lí ba đường vuông góc.
3. Nắm được khái niệm và biết cách tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Việc tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng được quy về tính góc giữa hai đường thẳng.

2. Vì lí do giảm tải nên SGK lần này cho HS công nhận các tính chất 1 và 2 trong §3, (các vấn đề này được trình bày khá kĩ trong các SGK trước đây). Nếu GV muốn tìm hiểu sâu sắc nội dung này thì xem các lưu ý thuộc phần vectơ. Có thể dựa vào kết quả "Các đường thẳng cùng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng thì cùng nằm trong một mặt phẳng" để giải thích tính duy nhất của mặt phẳng được nêu trong tính chất 1 ; còn khi giải thích tính duy nhất của đường thẳng được nêu trong tính chất 2, có thể dựa vào kết quả "Tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^o".

Chú ý rằng, nhờ tính duy nhất của mặt phẳng nêu trong tính chất 1, ta có thêm phương pháp để chứng minh nhiều đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng hoặc nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng.

Trong phần này, GV cũng cần nhấn mạnh vai trò của mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng, nhờ đó góp phần giải bài toán "tìm tập hợp các điểm cách đều ba điểm không thẳng hàng cho trước" (mặc dù nó không được trình bày thành một mục riêng) và từ đó có thể tìm điểm cách đều nhiều điểm trong một số trường hợp.

3. Sau khi trình bày 3 bằng cả hai cách, giáo viên cần lưu ý tới các nội dung :

1) Từ kết quả của 3, ta khẳng định được đối với tứ diện *ABCD*, có duy nhất một điểm cách đều bốn đỉnh của nó, hoặc sáu mặt phẳng trung trực của sáu cạnh của tứ diện *ABCD* có một điểm chung duy nhất.

Tính duy nhất của điểm chung nói trên được giải thích dễ dàng : Nếu có hai điểm chung phân biệt của sáu mặt phẳng đó là O và O' thì đường thẳng OO' sẽ vuông góc với cả bốn mặt của hình tứ diện. Điều này không thể xảy ra.

2) Có thể chỉ rõ điểm cách đều bốn đỉnh của tứ diện *ABCD* khi :

• *ABCD* là tứ diện vuông (ba cạnh xuất phát từ một đỉnh vuông góc từng đôi một).

• *ABCD* là tứ diện có bốn mặt là bốn tam giác vuông (xem BT 16, chương III, SGK).

• *ABCD* là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

• *ABCD* là tứ diện có ba cạnh xuất phát từ một đỉnh bằng nhau và mặt đối diện với đỉnh đó là tam giác đều.

Đó là những kiến thức hết sức cơ bản phục vụ cho phần mặt cầu đi qua nhiều điểm sẽ được trình bày trong chương trình Hình học lớp 12.

4. Về phần liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, các tính chất 3, 4, 5 có thể được giải thích như sau :

• *Tính chất 3*

a) Lấy hai đường thẳng c, d cắt nhau trong (P). Do $a \perp (P)$ nên $a \perp c$ và $a \perp d$. Mặt khác $a \parallel b$ nên $b \perp c$ và $b \perp d$, tức là $b \perp (P)$.

b) Giả sử b cắt (P) tại điểm B. Nếu a không song song với b thì ta kẻ đường thẳng b' đi qua điểm B và song song với a, khi đó $b' \perp (P)$. Như vậy từ B có hai đường thẳng b, b' cùng vuông góc với (P), điều này vô lí.

• *Tính chất 4*

a) Vì $(P) \parallel (Q)$ nên trong (P) có hai đường thẳng cắt nhau c và d, trong (Q) có hai đường thẳng cắt nhau c_1 và d_1 mà $c \parallel c_1$, $d \parallel d_1$. Khi đó, vì $a \perp (P)$ nên $a \perp c$ và $a \perp d$, từ đó $a \perp c_1$ và $a \perp d_1$, tức là $a \perp (Q)$.

b) Nếu (P) và (Q) cắt nhau thì qua một điểm có hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng, điều này vô lí.

• *Tính chất 5*

a) Vì $a \parallel (P)$ nên có đường thẳng a_1 trong (P) mà $a_1 \parallel a$. Do $b \perp (P)$ nên $b \perp a_1$, từ đó $b \perp a$.

b) Nếu a và (P) không song song, do a không nằm trong (P) nên nó cắt (P), chẳng hạn tại điểm A. Khi đó, trong (P) xét đường thẳng Δ đi qua điểm A thì $\text{mp}(\Delta, a) \perp b$ và $(P) \perp b$. Như vậy, qua điểm A có hai mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng, điều này vô lí.

5. Việc so sánh độ dài các đường xiên thông qua các hình chiếu của chúng là vấn đề không khó (chỉ cần vận dụng định lí Py-ta-go) nên các nội dung đó được chuyển vào phần bài tập của §3 này.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Theo giả thiết thì $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ đồng phẳng và $\vec{v}$, $\vec{w}$ không cùng phương, do đó $\vec{r} = m\vec{v} + n\vec{w}$. Vậy

$$\vec{r}.\vec{u} = m\vec{v}.\vec{u} + n\vec{w}.\vec{u} = 0.$$

2

Vì $a \perp AB$, $a \perp AC$ nên $a \perp \text{mp}(ABC)$, do đó $a \perp BC$.

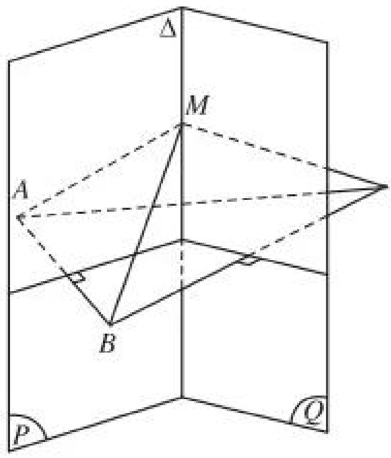
3

Cách 1. M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} MA = MB \\ MB = MC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ thuộc mặt phẳng trung trực } (P) \text{ của } AB \\ M \text{ thuộc mặt phẳng trung trực } (Q) \text{ của } BC. \end{cases}$$

Rõ ràng (P) và (Q) đều đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên chúng cắt nhau theo một đường thẳng Δ (h.91). Vậy $M \in \Delta$.



Hình 91

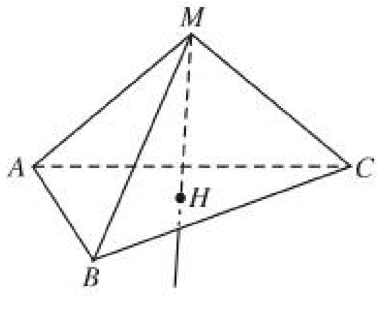
Kết luận. Tập các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng Δ nói trên.

Chú ý rằng đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nó được gọi là *trục của tam giác ABC*.

Cách 2. Kẻ MH vuông góc với mp(ABC) tại H.

Các tam giác vuông MAH, MBH, MCH có MH chung. Vậy $MA = MB = MC \Leftrightarrow HA = HB = HC$ $\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

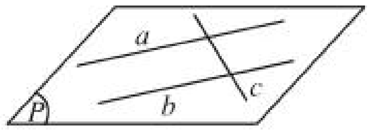
Vậy, tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó (h.92).



Hình 92

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

12. Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì vuông góc với mặt phẳng (P)" không đúng. Chẳng hạn với hai đường thẳng song song a, b cho trước trong mặt phẳng (P), ta có thể lấy đường thẳng c nằm trong (P) sao cho $c \perp a$ và $c \perp b$ (h.93).

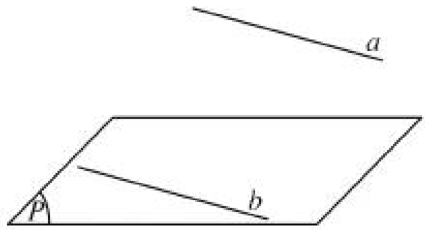


Hình 93

13. a) Mệnh đề : "Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$" luôn đúng bởi vì $a \,//\, (P)$ thì a song song với đường thẳng a_1 nằm trong (P) ; do $b \perp (P)$ nên $b \perp a_1$, từ đó ta có $b \perp a$.

b) Mệnh đề "Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$" sai vì b có thể nằm trong (P).

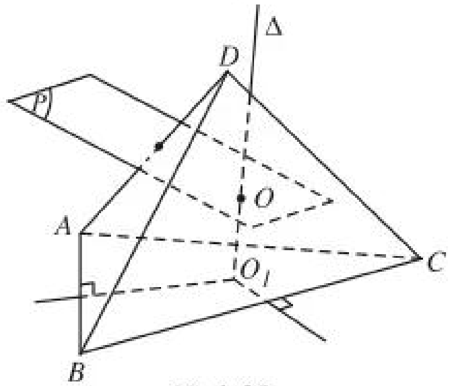
c) Mệnh đề "Nếu $a \,//\, (P)$, $b \,//\, a$ thì $b \,//\, (P)$" không đúng vì có trường hợp $b \subset (P)$ (h. 94).



Hình 94

14. Bạn đọc tự chứng minh.

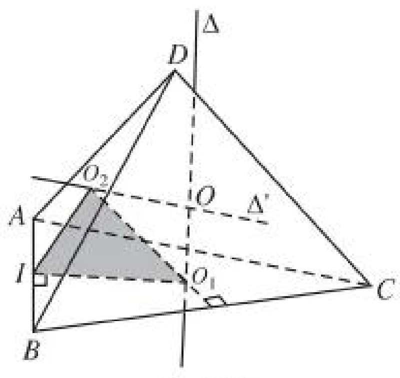
15. *Cách 1* (h.95). Áp dụng kết quả của hoạt động 3, §3 thì tập các điểm cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC là đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của DA thì (P) cắt Δ tại điểm O, đó là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D.



Hình 95

(mp(P) phải cắt Δ vì nếu $\Delta \,//\, (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$ thì từ $DA \perp (P)$ suy ra $DA \perp \Delta$, khi ấy DA nằm trong mp(ABC), mâu thuẫn với giả thiết A, B, C, D không đồng phẳng).

Cách 2 (h.96). Có thể tìm điểm O bằng cách xét thêm đường thẳng Δ' vuông góc với (ABD) tại tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Dễ thấy cả Δ và



Hình 96

Δ' cùng nằm trong mặt phẳng trung trực (IO_1O_2) của AB, trong đó I là trung điểm của AB. Điểm O cần tìm là giao điểm của Δ và Δ'.

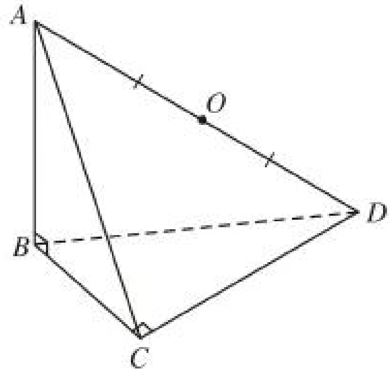
16. (h.97) a) Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp mp(BCD)$.

Mặt khác $BC \perp CD$ nên $AC \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$$

tức là $\quad AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^o$ nên điểm cách đều bốn điểm A, B, C, D là trung điểm O của AD.

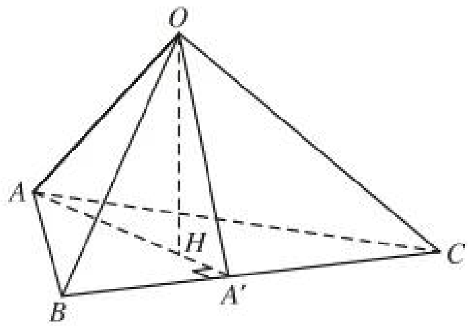


Hình 97

17. (h.98) a) Ta có

$$AB^2 = OA^2 + OB^2\ ;$$
$$BC^2 = OB^2 + OC^2\ ;$$
$$AC^2 = OA^2 + OC^2.$$

Vậy $BC^2 < AB^2 + AC^2$, tức là góc ABC của tam giác ABC là góc nhọn. Tương tự như trên, ta chứng minh được tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn.



Hình 98

b) *Cách 1*. Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$. Mặt khác $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$. Vậy $AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), tức là H thuộc một đường cao của tam giác ABC. Tương tự như trên ta cũng có H thuộc đường cao thứ hai của tam giác ABC. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.

Cách 2. Nếu K là trực tâm của tam giác ABC thì $AK \perp BC$, mặt khác $OA \perp BC$ nên $BC \perp (AOK)$, suy ra $BC \perp OK$. Tương tự như trên ta cũng có $AB \perp OK$. Vậy $OK \perp (ABC)$, tức là K trùng H.

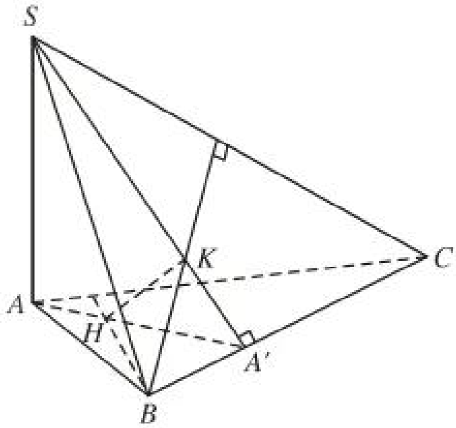
c) Nếu $AH \perp BC$ tại A' thì $BC \perp OA'$. Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA' (vuông tại O) và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC (vuông tại O) nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}, \qquad \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

18. (h.99) a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC, do $SA \perp (ABC)$ nên $SA' \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc). Vì H là trực tâm tam giác ABC, K là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc AA', K thuộc SA'. Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$, mà $BH \perp SA$ nên $BH \perp SC$. Mặt khác, K là trực tâm tam giác SBC nên $BK \perp SC$. Vậy $SC \perp (BHK)$.



Hình 99

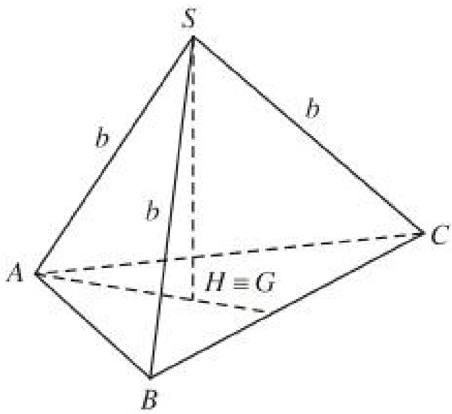
c) Từ câu b) ta suy ra $HK \perp SC$. Mặt khác $HK \perp BC$ do $BC \perp (SAA')$. Vậy $HK \perp \text{mp}(SBC)$.

19. a) (h.100) Kẻ $SH \perp \text{mp}(ABC)$, do $SA = SB = SC$ nên ta có $HA = HB = HC$.

Mặt khác, ABC là tam giác đều nên H trùng với trọng tâm G của tam giác đó. Vậy $SG \perp \text{mp}(ABC)$.

$$SG^2 = SA^2 - AG^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

từ đó $SG = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}$ (với $3b^2 > a^2$).



Hình 100

b) (h.101) Dễ thấy $AB \perp SC$. Vì (P) đi qua A và vuông góc với SC nên AB nằm trong (P). Kẻ đường cao AC_1 của tam giác SAC thì (P) chính là $\text{mp}(ABC_1)$. Do tam giác SAC cân tại S nên điểm C_1 nằm trong đoạn thẳng SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^\circ$. Điều này tương đương với $AC^2 < SA^2 + SC^2$ hay $a^2 < 2b^2$. Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) là tam giác cân ABC_1.

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB.C'C_1 = \frac{1}{2}a.C'C_1$$

(C' là trung điểm của AB).

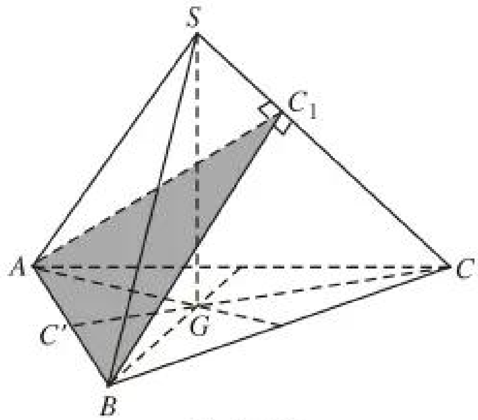
Mặt khác, $C'C_1.SC = SG.CC'$

$$\Rightarrow C'C_1 = \frac{SG.CC'}{SC},$$

tức là

$$C'C_1 = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}.$$

Vậy $S_{ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$.



Hình 101

20. a) *Cách 1.* (h.102) Kẻ đường cao BB_1 và CC_1 của tam giác BCD. Kí hiệu H là trực tâm của tam giác đó.

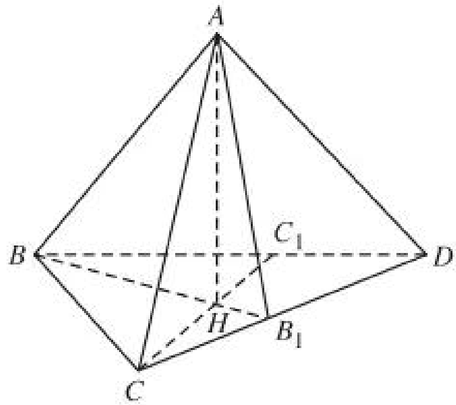
Vì $AB \perp CD$, $BB_1 \perp CD$ nên

$$CD \perp AH. \quad (1)$$

Tương tự như trên ta cũng có

$$BD \perp AH. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp BC$. Mặt khác $DH \perp BC$. Do đó $BC \perp AD$.



Hình 102

Cách 2. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} =$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

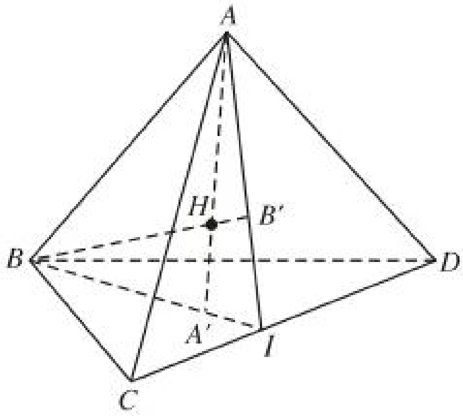
Từ kết quả trên suy ra nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ (tức là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$) và $AC \perp BD$ (tức là $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$) thì $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$, tức là $BC \perp AD$.

b) • Chứng minh i) $\Leftrightarrow$ ii).

Trước hết ta chứng minh kết quả : Với tứ diện $ABCD$, điều kiện $AC \perp BD$, $AB \perp CD$ xảy ra khi và chỉ khi hình chiếu của A trên mp(BCD) là trực tâm tam giác BCD.

Thật vậy, kẻ $AA' \perp (BCD)$ thì A' là hình chiếu của A trên mp(BCD). Nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ thì $BA' \perp CD$, $CA' \perp BD$. Vậy A' là trực tâm tam giác BCD (h.103).

Ngược lại, nếu A' là trực tâm tam giác BCD thì $BA' \perp CD$, từ đó suy ra $AB \perp CD$. Tương tự, ta cũng có $AC \perp BD$.



Hình 103

Từ câu a) và kết quả trên, ta suy ra i) và ii) là tương đương.

• Chứng minh i) $\Leftrightarrow$ iii).

Ta có

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Tương tự như trên ta cũng có

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DC \perp AB.$$

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DB \perp AC.$$

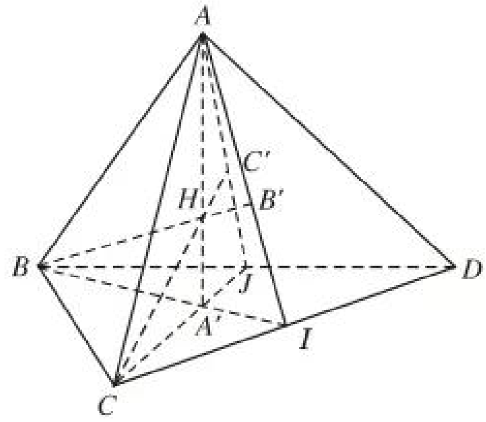
Vậy i) $\Leftrightarrow$ iii).

c) (h.104) Vì $ABCD$ là tứ diện trực tâm nên nếu kẻ các đường cao AA' và BB' của tứ diện thì A', B' lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD. Khi đó BA', AB' và CD đồng quy tại I. Như vậy AA', BB' là hai đường cao của tam giác ABI nên AA' và BB' cắt nhau. Tương tự, nếu kẻ đường cao CC'

của tứ diện thì ta cũng có AA', CC' cắt nhau và BB', CC' cắt nhau. Mặt khác, AA', BB', CC' không cùng nằm trong một mặt phẳng nên AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.

Lí luận tương tự như trên, ta có AA', BB', DD' đồng quy (DD' là một đường cao của tứ diện $ABCD$).

Vậy, khi $ABCD$ là tứ diện trực tâm thì các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm.



Hình 104