§3 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được định nghĩa của phép đối xứng trục và biết rằng phép đối xứng trục là một phép dời hình, do đó nó có các tính chất của phép dời hình.
2. Biết cách dựng ảnh của một hình đơn giản (đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đa giác, đường tròn,...) qua phép đối xứng trục.
3. Nhận biết những hình đơn giản có trục đối xứng và xác định được trục đối xứng của hình đó.
4. Biết áp dụng phép đối xứng trục để tìm lời giải của một số bài toán.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Phép đối xứng trục có vai trò đặc biệt vì mọi phép dời hình đều là hợp thành của nhiều nhất ba phép đối xứng trục (xem §5. II.2, Chương I, SGV). Các phép tịnh tiến hoặc phép quay đều có thể thực hiện bằng cách di chuyển mặt phẳng trên chính nó một cách liên tục, nhưng phép đối xứng trục thì không. Lí do là phép đối xứng trục làm thay đổi "hướng" của mặt phẳng, còn các phép tịnh tiến và phép quay thì không. Một phép dời hình gọi là thuận hay nghịch tuỳ theo nó có bảo toàn "hướng" của mặt phẳng hay không.

2. Để chứng tỏ phép đối xứng trục là một phép dời hình, ta có thể chứng minh trực tiếp từ định nghĩa, tuy nhiên SGK đã trình bày cách chứng minh bằng phương pháp toạ độ. Vấn đề rất đơn giản nếu ta chọn hệ trục toạ độ sao cho trục đối xứng là trục hoành. Biểu thức toạ độ của phép đối xứng có trục bất kì không được đưa ra vì quá phức tạp, ngay cả trong trường hợp trục đối xứng đi qua gốc toạ độ thì biểu thức cũng đã không đơn giản :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha. \end{cases}$$

Ma trận $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao và có định thức bằng -1.

Điều đó chứng tỏ rằng phép đối xứng trục là phép dời hình nghịch.

3. Hình có trục đối xứng rất thường gặp trong thực tế. Có thể tạo nên các hình có một hay nhiều trục đối xứng bằng cách cắt giấy (gấp đôi, gấp tư,... tờ giấy rồi dùng kéo cắt bỏ phần ngoài rìa).

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, những điểm nằm trên đường thẳng a biến thành chính nó.

$\boxed{?2}$ Nếu phép đối xứng trục $Đ_a$ biến M thành M' thì nó biến M' thành M. Nếu $Đ_a$ biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ thì nó biến hình $\mathscr{H}'$ thành hình $\mathscr{H}$.

1

Vì $A = (x_A\ ;\ y_A)$ và $B = (x_B\ ;\ y_B)$ nên dễ thấy $A' = Đ_a(A) = (x_A\ ;\ -y_A)$ và $B' = Đ_a(B) = (x_B\ ;\ -y_B)$. Khi đó

$$A'B' = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (-y_B + y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB.$$

$\boxed{?3}$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$

$\boxed{?4}$ +) Các chữ cái sau đây có một trục đối xứng :

A, B, C, D, Đ, E, M, T, U, V, Y.

Các chữ cái sau đây có hai trục đối xứng : H, I, X. Chữ cái O (coi là đường tròn) có vô số trục đối xứng (là các đường kính của đường tròn O).

+) Đối với bốn hình vẽ tiếp theo thì hình thứ nhất có một trục đối xứng, hình thứ hai không có trục đối xứng, hình thứ ba có hai trục đối xứng, hình thứ tư có năm trục đối xứng.

$\boxed{?5}$ Nếu hai điểm A, B nằm về hai phía của đường thẳng d thì điểm M cần tìm là giao điểm của đoạn thẳng AB và đường thẳng d. Thật vậy, với mọi điểm M' của d khác M, ta luôn có :

$$AM' + M'B > AB = AM + MB.$$

2

Lấy điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng d thì $AM + MB = A'M + MB$, nên điểm cần tìm là giao điểm của đoạn thẳng $A'B$ và đường thẳng d.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

7. a) Khi $d \parallel a$.

b) Khi d vuông góc với a hoặc d trùng với a.

c) Khi d cắt a nhưng không vuông góc với a. Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên a.

d) Khi góc giữa d và a bằng 45°.

8. • Ảnh của điểm $M(x\ ;\ y)$ qua phép đối xứng có trục Oy là điểm $M'(-x\ ;\ y)$. Ta có

$$M \in (\mathscr{C}_1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x)^2 + y^2 + 4(-x) + 5y + 1 = 0,$$

nghĩa là $M'(-x\ ;\ y)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C}'_1)$: $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$.

Vậy, ảnh của $(\mathscr{C}_1)$ qua phép đối xứng có trục Oy là $(\mathscr{C}'_1)$.

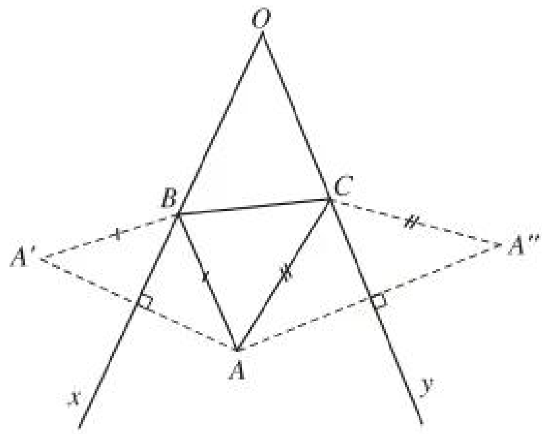
• Tương tự, ta có ảnh của $(\mathscr{C}_2)$ chính là $(\mathscr{C}_2)$.

Chú ý. Có thể viết phương trình ảnh $(\mathscr{C}'_1)$ của $(\mathscr{C}_1)$ bằng cách tìm tâm O_1, bán kính R_1 của $(\mathscr{C}_1)$; $(\mathscr{C}'_1)$ là đường tròn có tâm O'_1, bán kính R_1 với O'_1 là điểm đối xứng với O_1 qua trục Oy.

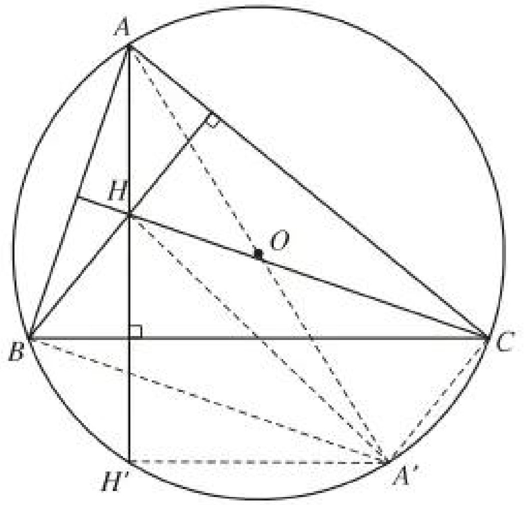
9. (h.2) Xét tam giác bất kì ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A'' là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Gọi $2p$ là chu vi của tam giác ABC thì

$$2p = AB + BC + CA = A'B + BC + CA'' \geq A'A'',$$

dấu "=" xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A'' thẳng hàng. Suy ra để chu vi tam giác ABC bé nhất thì phải lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng $A'A''$ với hai tia Ox và Oy (các giao điểm đó tồn tại vì góc xOy nhọn).



Hình 2



Hình 3

10. Chú ý rằng điểm A không trùng với B hoặc C, vì khi đó không tồn tại tam giác ABC. Trường hợp BC là đường kính thì H trùng A, do đó H nằm trên đường tròn cố định $(O ; R)$.

Xét trường hợp BC không là đường kính (h.3). Giả sử đường thẳng AH cắt đường tròn $(O ; R)$ tại H'. Như vậy với mỗi điểm $A \in (O ; R)$ (khác với B và C), thì ta xác định được điểm $H' \in (O ; R)$. Ta chứng minh rằng H và H' đối xứng với nhau qua BC. Trong trường hợp tam giác ABC vuông tại B (hoặc C) thì H và H' trùng B (hoặc C), tức là H và H' đối xứng với nhau qua BC. Trong các trường hợp khác, gọi AA' là đường kính của đường tròn $(O ; R)$ thì $A'B \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB) và $A'C \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với *AC*) nên *A'BHC* là hình bình hành. Vậy *BC* đi qua trung điểm của *HA'*. Mặt khác *BC* // *A'H'* (vì cùng vuông góc với *AH*) nên *BC* cũng đi qua trung điểm của *HH'*, do đó *H* và *H'* đối xứng với nhau qua *BC*. Nếu gọi *Đ* là phép đối xứng có trục là đường thẳng *BC* thì *Đ* biến *H'* thành *H*. Nhưng *H'* luôn luôn nằm trên $(O\ ;\ R)$ nên *H* nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép đối xứng trục *Đ*.

11. a) Các hình có trục đối xứng là những từ sau đây (các từ còn lại không có trục đối xứng) :

MÂM **HOC** **HE** **CHEO**

b) Trục *Oy* luôn là trục đối xứng của đồ thị hàm số chẵn $y = f(x)$.

Thật vậy, nếu điểm $M(x\ ;\ y)$ thuộc đồ thị, tức là $y = f(x)$ thì điểm đối xứng với *M* qua *Oy* là điểm $M'(-x\ ;\ y)$ cũng thuộc đồ thị vì :

$$f(-x) = f(x) = y.$$