§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I – MỤC TIÊU

Làm cho HS nắm được :

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt :

a) Chúng không có điểm chung (trường hợp này ta nói chúng song song với nhau).

b) Chúng có ít nhất một điểm chung. Khi đó chúng có một đường thẳng chung duy nhất đi qua điểm chung đó (trường hợp này ta nói chúng cắt nhau).

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song và biết vận dụng nó để giải bài tập.

3. Biết sử dụng hai tính chất : 1), 2) và các hệ quả 1), 2) của tính chất 1) để giải các bài toán về quan hệ song song.

4. Định lí Ta-lét, định lí Ta-lét đảo và biết vận dụng chúng.

5. Định nghĩa và một số tính chất của hình lăng trụ, hình hộp và hình chóp cụt.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khi dạy xong định lí 1 về điều kiện để hai mặt phẳng song song, trong thời gian luyện tập, giáo viên có thể đưa ra hệ quả sau đây của định lí 1 (coi như điều kiện thứ hai để nhận biết hai mặt phẳng song song) :

   Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b, mặt phẳng (Q) khác (P) chứa hai đường thẳng c và d sao cho $a \parallel c$, $b \parallel d$ thì (P) song song với (Q).

2. Có thể chứng minh hệ quả 1, hệ quả 2 của tính chất 1 lần lượt như sau :

   • Lấy một điểm A thuộc a. Theo tính chất 1, có duy nhất một mp(P) đi qua A và song song với (Q). Gọi b là một đường thẳng nằm trong (Q) và song song với a. Khi đó $b \parallel (P)$ nên mp(A, b) cắt mp(P) theo giao tuyến a' đi qua A và song song với b. Từ đó a trùng với a' và dễ thấy (P) là mặt phẳng duy nhất qua a và song song với (Q).

   • Giả sử hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng song song với mp(R). Nếu (P) và (Q) cắt nhau theo đường thẳng c thì rõ ràng $c \parallel$ mp(R) (mâu thuẫn với hệ quả 1). Vậy $(P) \parallel (Q)$.

3. Trong một số sách giáo khoa trước đây (*Hình học 11*, tác giả Văn Như Cương, Nguyễn Mộng Hy), định lí Ta-lét và định lí Ta-lét đảo được phát biểu như sau :

   a) Định lí Ta-lét : Giả sử ba đường thẳng p, q, r lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song và chúng cắt hai đường thẳng a và a' lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Khi đó

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

   b) Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên đường thẳng a có ba điểm A, B, C, trên đường thẳng a' chéo với a có ba điểm A', B', C' sao cho B nằm giữa A và C,

B' nằm giữa A' và C', và $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$. Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song.

Cách phát biểu định lí Ta-lét trong sách giáo khoa lần này có những điểm khác trước đây vì những lí do sau :

• Cách phát biểu định lí Ta-lét lần này phù hợp với cách phát biểu định lí Ta-lét trong mặt phẳng (ba đường thẳng song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ).

• Định lí này được sử dụng nhiều hơn định lí mang tên Ta-lét ở sách giáo khoa cũ.

4. Định lí mang tên Ta-lét trong sách giáo khoa lần này không có định lí Ta-lét đảo (hiểu theo nghĩa nghiêm ngặt). Chúng tôi đưa vào định lí 3 mà nội dung của nó tuy không phải là định lí đảo của định lí 2 nhưng ta vẫn gọi nó là định lí Ta-lét đảo.

5. Ta có thể chứng minh định lí Ta-lét đảo như sau :

Kẻ BB_1 song song với CC' ($B_1 \in AC'$). Ta có $\dfrac{AB_1}{B_1C'} = \dfrac{AB}{BC}$. Mặt khác $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$ nên $\dfrac{AB_1}{B_1C'} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$. Từ đó suy ra $AA' \mathbin{/\!/} B_1B'$. Gọi (Q) là mp(BB_1B'). Do $AA' \mathbin{/\!/} B_1B'$, $CC' \mathbin{/\!/} BB_1$ nên tồn tại các mặt phẳng (P), (R) lần lượt đi qua AA', CC' và cùng song song với (Q). Vậy ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song.

Ngoài cách chứng minh trên, ta còn có cách sau đây :

Vì a và a' chéo nhau nên hai đường thẳng AA' và BB' chéo nhau. Từ đó ta lấy được hai mặt phẳng (P) và (Q) song song, lần lượt đi qua AA' và BB'. Qua C dựng mp(R) song song với mp(P) cắt a' tại C''. Do (P), (Q), (R) đôi một song song nên theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C''} = \frac{CA}{C''A'}.$$

Mặt khác theo giả thiết $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ nên ta có $B'C'' = B'C'$ và $C''A' = C'A'$. Vậy $C'' \equiv C'$. Từ đó suy ra ba đường thẳng AA', BB', CC' nằm trên những mặt phẳng song song, cũng tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) không thể có ba điểm chung không thẳng hàng vì nếu có thì chúng sẽ trùng nhau (tính chất thừa nhận 2).

$\boxed{?2}$ Nếu hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung, các điểm chung đó nằm trên một đường thẳng (tính chất thừa nhận 4).

$\boxed{?3}$ Mọi đường thẳng nằm trên (P) đều song song với (Q) vì nếu có đường thẳng nằm trên (P) cắt (Q) tại một điểm thì điểm ấy là điểm chung của (P) và (Q) (vô lí).

$\boxed{?4}$ Khẳng định đã cho đúng, vì nếu (P) và (Q) có điểm chung A thì mọi đường thẳng nằm trên (P), qua điểm A đều cắt (Q) tại điểm A (mâu thuẫn với giả thiết).

1

a) mp(P) và mp(Q) không trùng nhau, vì nếu chúng trùng nhau thì đường thẳng a nằm trên (P) cũng phải nằm trên (Q), mâu thuẫn với giả thiết $a \parallel (Q)$.

b) Do $a \parallel (Q)$ và a nằm trên (P) nên (P) cắt (Q) theo giao tuyến c song song với a. Lí luận tương tự, $c \parallel b$. Từ đó suy ra a song song với b hoặc a trùng với b (mâu thuẫn với giả thiết).

$\boxed{?5}$ Hai đường thẳng a và b không có điểm chung, vì nếu chúng có điểm chung A thì (P) và (Q) cũng có điểm chung A (mâu thuẫn với giả thiết).

$\boxed{?6}$ Có thể xem hai mặt đối diện bất kì của hình hộp là hai mặt đáy của nó. Khi đó các mặt còn lại là các mặt bên.

2

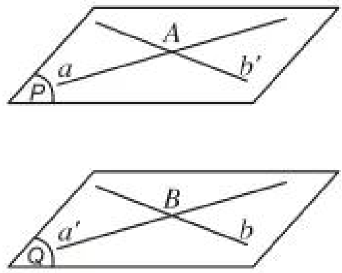
Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Rõ ràng tứ giác $ABC'D'$ là hình bình hành nên hai đường chéo AC' và BD' cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Tứ giác $BCD'A'$ là hình bình hành nên hai đường chéo BD' và CA' cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, vì thế O cũng là trung điểm của CA'. Lí luận tương tự, O cũng là trung điểm của DB'. Vậy bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

29. Các mệnh đề đúng : b), c), f).

30. Các mệnh đề đúng : a), d), e).

31. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Qua một điểm A thuộc a, vẽ đường thẳng b' song song với b và qua một điểm B thuộc b vẽ đường thẳng a' song song với a (h.54).



Hình 54

Gọi (P) là mp(a, b'), (Q) là mp(b, a') thì rõ ràng $(P) \,//\, (Q)$.

Giả sử còn có mp(P') và mp(Q') lần lượt qua a và b và song song với nhau. Khi đó ta có $b \,//\, (P')$, và $b \,//\, (P)$ suy ra giao tuyến a của (P) và (P') cũng song song với b, trái với giả thiết. Vậy (P') trùng (P) và do đó (Q') trùng (Q).

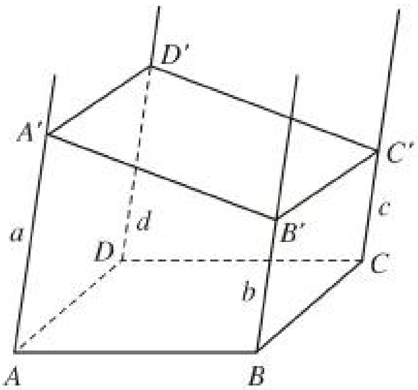
32. *Cách 1*. Giả sử $c = \text{mp}(M, a) \cap \text{mp}(M, b)$. Ta cần chứng minh c cắt cả a và b.

Vì c và a cùng nằm trên một mặt phẳng và không thể trùng nhau (do c qua M và a không đi qua M) nên hoặc $c \,//\, a$ hoặc c cắt a. Cũng vậy, hoặc $c \,//\, b$ hoặc c cắt b. Không thể xảy ra đồng thời $c \,//\, a$, $c \,//\, b$ vì a và b chéo nhau. Vậy nếu c song song với a thì c phải cắt b, tức là c đi qua một điểm của mp(Q) và song song với a, suy ra c phải thuộc mp(Q), và do đó M thuộc (Q) (trái với giả thiết). Tương tự, không thể có c song song với b. Tóm lại c phải cắt cả a và b.

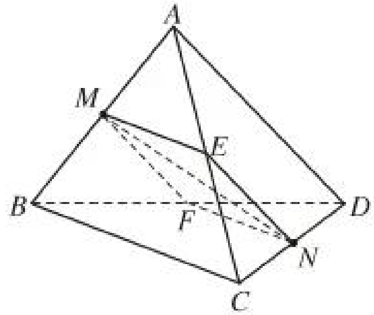
Nếu còn có đường thẳng c' khác c đi qua M, cắt cả a và b thì a và b đồng phẳng. Vô lí.

Cách 2. Gọi N là giao điểm của mp(M, a) và b thì MN là đường thẳng cần tìm.

33. (h.55) Ta có $a \,//\, d$, $AB \,//\, DC$, suy ra mp$(a, AB) \,//\,$ mp(d, DC) hay mp$(a, b) \,//\,$ mp(d, c). Từ đó ta có $A'B' \,//\, D'C'$, trong đó mp$(A'B'C') \cap$ mp$(a, b) = A'B'$, $D'C' =$ mp$(A'B'C') \cap$ mp(d, c). Lí luận tương tự ta có $A'D' \,//\, B'C'$. Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.



Hình 55



Hình 56

34. *Cách 1*. Xem hình 56.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng AD và song song với BC ; (R) là mặt phẳng chứa đường thẳng BC và song song với AD. Theo điều kiện song song của hai mặt phẳng, ta dễ thấy ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một song song, nên theo định lí Ta-lét ta có :

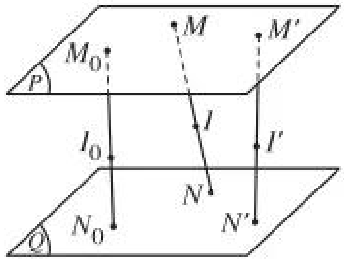
$$\frac{AM}{DN'} = \frac{MB}{N'C} = \frac{BA}{CD} \qquad (*)$$

ở đây $N' = CD \cap (P)$.

Mặt khác $AM = BM$, nên từ (*) ta suy ra N' là trung điểm của CD, tức là N' trùng với N.

Cách 2. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và BD. Dễ thấy bốn điểm M, E, N, F đồng phẳng và mp$(MENF)$ qua M và song song với BC và AD.

35. *Thuận*. Giả sử $M \in (P)$, $N \in (Q)$ và điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\dfrac{IM}{IN} = k$. Trên hai mặt phẳng (P) và (Q), ta lần lượt lấy hai điểm cố định M_0 và N_0 rồi lấy một điểm I_0 thuộc đoạn thẳng M_0N_0 sao cho $\dfrac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$ (h.57). Khi ấy điểm I_0 cố định.



Hình 57

Ta có :

$$\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} \Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}.$$

Áp dụng định lí Ta-lét đảo, ta suy ra đường thẳng I_0I thuộc một mặt phẳng (R) song song với (P) và (Q). Mặt phẳng (R) cố định vì nó qua điểm cố định I_0 và song song với mặt phẳng cố định (P). Vậy điểm I thuộc mặt phẳng (R) cố định.

Đảo. Ngược lại, lấy một điểm I' bất kì trên mặt phẳng (R). Qua I' ta kẻ một đường thẳng cắt hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt tại M' và N'. Xét hai cát tuyến M_0N_0, $M'N'$ và ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R). Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{I'M'}{I_0M_0} = \frac{I'N'}{I_0N_0} = \frac{M'N'}{M_0N_0}.$$

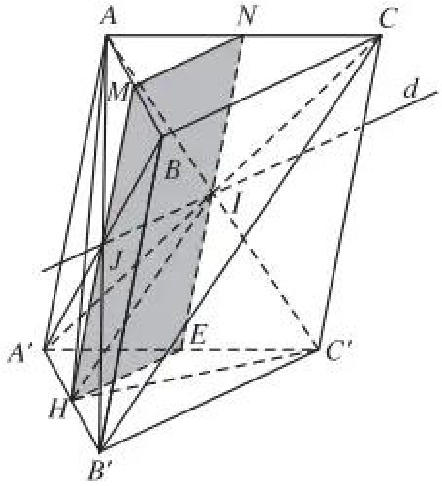
Từ đó ta suy ra I' thuộc đoạn thẳng $M'N'$ và

$$\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k.$$

Kết luận. Tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$ là mặt phẳng (R) nói trên.

36. (h.58) a) Gọi I là tâm của hình bình hành $AA'C'C$. Xét tam giác $A'B'C$ thì HI là một đường trung bình của nó, nên $CB' \parallel HI$. Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC'), vậy $CB' \parallel \text{mp}(AHC')$.

b) Gọi J là tâm của hình bình hành $AA'B'B$. Rõ ràng I, J là hai điểm chung của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ. Rõ ràng $d \parallel B'C'$ nên $d \parallel (BB'C'C)$.



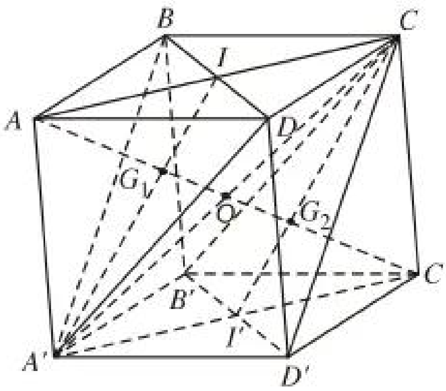
Hình 58

c) Đường thẳng HJ cắt AB tại M. Ta có $AA' \parallel HM$, suy ra $AA' \parallel \text{mp}(H, d)$. Vậy $\text{mp}(AA'C'C)$ cắt $\text{mp}(H, d)$ theo giao tuyến qua I và song song với AA'. Giao tuyến này cắt AC và $A'C'$ lần lượt tại N và E. Vậy thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi $\text{mp}(H, d)$ là hình bình hành $MNEH$.

37. (h.59) a) Rõ ràng $BD \parallel B'D'$ và $A'B \parallel D'C$. Từ đó suy ra hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau

b) Trong $\text{mp}(AA'C'C)$, tam giác $AA'C$ có AO và $A'I$ là hai đường trung tuyến (O là tâm của hình hộp, I là tâm của hình bình hành $ABCD$) nên giao điểm của AC' với $\text{mp}(A'BD)$ chính là trọng tâm G_1 của tam giác BDA'.

Chứng minh tương tự, AC' đi qua trọng tâm G_2 của tam giác $B'D'C$.



Hình 59

c) Ta có $AG_1 = \frac{2}{3}AO$, $C'G_2 = \frac{2}{3}C'O$, mà

$$AO = C'O \text{ suy ra } AG_1 = C'G_2. \quad (1)$$

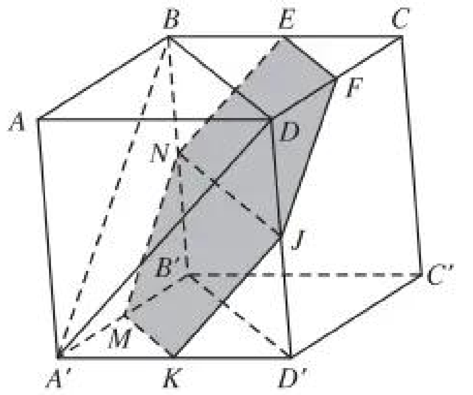
Ta lại có :

$$OG_1 = \frac{1}{2}AG_1,\ OG_2 = \frac{1}{2}C'G_2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$G_1G_2 = OG_1 + OG_2 = AG_1 = C'G_2 \text{ (h.59).}$$

d) (h.60) Gọi E, F, J, K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$. Dễ thấy $EF \parallel JN$, $JN \parallel KM$ và $EF \parallel BD$, $FJ \parallel BA'$, $KM \parallel BD$, $MN \parallel BA'$. Vậy hai mặt phẳng $(EFJN)$ và $(JKMN)$ đều song song với mp$(A'BD)$. Nhưng hai mặt phẳng $(EFJN)$, $(JKMN)$ có chung điểm J nên chúng phải trùng nhau. Vậy sáu điểm E, F, J, K, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.



Hình 60

38. Xem hình 59. Ta biết rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh. Từ đó, xét hình bình hành $ACC'A'$, ta có

$$AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + AA'^2).$$

Đối với hình bình hành $BDD'B'$, ta có

$$BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + BB'^2).$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned} AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2 &= 2[(AC^2 + BD^2) + (AA'^2 + BB'^2)] \\ &= 2[2(AB^2 + AD^2) + 2AA'^2] \\ &= 4(AB^2 + AD^2 + AA'^2). \end{aligned}$$

Nghĩa là ta đã chứng minh được : Tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

39. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB' và CC'. Dễ thấy các đường thẳng MM', NN', PP' cũng đồng quy tại S và mp$(M'N'P')$ song song với mp(MNP). Vậy $MNP.M'N'P'$ là hình chóp cụt.