§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Biết cách tính góc giữa hai mặt phẳng.
2. Nắm được điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc và các tính chất liên quan ; biết vận dụng chúng vào việc giải toán.
3. Nắm được định nghĩa của các hình lăng trụ đặc biệt, hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Góc giữa hai mặt phẳng được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Tuy nhiên, nhiều khi ta có thể xác định góc giữa hai mặt phẳng như đã nêu trong SGK. Trên hình 109, SGK, kí hiệu $A = p \cap a$, $B = p \cap q$, $C = q \cap b$, $D = a \cap b$ thì hai góc ABC và ADC có các cạnh tương ứng vuông góc nên chúng bằng nhau hoặc bù nhau. Do đó, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng p và q.

2. Cần lưu ý rằng khi hai mặt phẳng vuông góc thì không phải hai đường thẳng bất kì nào nằm trong hai mặt phẳng đó cũng vuông góc với nhau ; hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì nói chung không song song.

GV nên giải thích rõ : từ định lí 3 suy ra "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia" ; còn định lí 2 khẳng định "để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, chỉ cần chỉ ra một mặt phẳng trong chúng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại".

GV cần làm cho HS hiểu các hệ quả 1, 2 để có thể áp dụng vào bài tập. Trong SGK ta chỉ nêu các hệ quả 1 và 2 mà không nêu chứng minh các hệ quả đó, tuy nhiên có thể chứng minh chúng như sau :

Hệ quả 1

Vì $(P) \perp (Q)$ nên có đường thẳng a_1 trong (P) mà $a_1 \perp (Q)$, mặt khác $a \perp (Q)$ nên $a \equiv a_1$ hoặc $a \parallel a_1$, ta lại có đường thẳng a đi qua A và A thuộc (P), bởi vậy a nằm trong (P).

Hệ quả 2

Giả sử $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ và $(P) \cap (Q) = a$. Lấy điểm A thuộc a, do $(P) \perp (R)$ nên từ A kẻ đường thẳng a_1 vuông góc với (R) thì a_1 nằm trong (P), tương tự a_1 nằm trong (Q). Vậy $a_1 \equiv a$, tức là $a \perp (R)$.

3. GV nên sử dụng thiết bị dạy học khi dạy các hình lăng trụ đặc biệt, hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

4. GV nên tổng kết một số chủ đề về quan hệ vuông góc.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Khi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song hay trùng nhau thì hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó sẽ song song hay trùng nhau, vì vậy góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^o.

1

Các đường thẳng AD, AB, AC lần lượt vuông góc với các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) và AB, AC, AD đôi một vuông góc. Vậy các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) vuông góc từng đôi một.

2

• mp(a, b) đi qua đường thẳng a và vuông góc với (P) vì nó chứa đường thẳng b vuông góc với (P). Vậy mp(a, b) chính là mp(Q).

• Tính duy nhất của (Q) :

Giả sử có mặt phẳng (Q') chứa a và vuông góc với (P), (Q') khác (Q). Vì (Q') chứa a nên a là giao tuyến của (Q) và (Q'). Khi đó $a \perp (P)$, mâu thuẫn với giả thiết a và (P) không vuông góc.

?2 1. + Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật.

+ Trong hình lăng trụ đứng thì cạnh bên của nó vuông góc với mặt đáy nên mọi mặt bên của hình lăng trụ đứng đều vuông góc với mặt đáy của nó.

2. Vì hình lăng trụ đều, theo định nghĩa, có đáy là đa giác đều nên các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật có hai kích thước bằng nhau, do đó chúng bằng nhau.

3. Hình hộp đứng có bốn mặt là những hình chữ nhật, đó là bốn mặt bên của nó.

4. + Sáu mặt của hình hộp chữ nhật là những hình chữ nhật.

+ Nếu sáu mặt của hình hộp là những hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật vì ba cạnh xuất phát từ một đỉnh đôi một vuông góc với nhau.

5. Gọi độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh của hình hộp chữ nhật là a, b, c. Từ giả thiết ta có $ab = bc = ca$, suy ra $a = b = c$, tức hình hộp chữ nhật đó là hình lập phương.

?3 Độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh a bằng $a\sqrt{3}$.

?4 Giả sử hình chóp đó là $S.A_1A_2...A_n$. Kẻ SH vuông góc với mp($A_1A_2...A_n$).

• Khi đó $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n \Leftrightarrow HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$, mà $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi H là tâm của đa giác đều đó. Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và đường cao của nó đi qua tâm của đáy.

• $\widehat{SA_kH}$ là góc giữa cạnh bên SA_k với mặt đáy ($k = \overline{1, n}$). Khi đó

$$SA_1 = SA_2 = ... = SA_n \Leftrightarrow \widehat{SA_1H} = \widehat{SA_2H} = ... = \widehat{SA_nH}.$$

Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau.

$\boxed{?5}$ Giả sử hình chóp cụt đều $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ sinh từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$.

Do mỗi mặt bên của hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ là các tam giác cân bằng nhau mà mặt phẳng $(A'_1A'_2...A'_n)$ song song với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ nên $A'_1A'_2 \parallel A_1A_2$, ..., $A'_nA'_1 \parallel A_nA_1$. Ngoài ra, $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = ... = A'_nA'_1$ và $A_1A'_1 = A_2A'_2 = ... = A_nA'_n$.

Vậy các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

III – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

21. Các câu a), b), c), f) sai ; d), e), g) đúng.

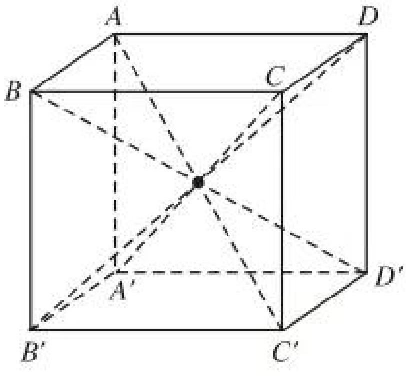
22. (h.105) Theo bài tập 38, §4, chương II, SGK ta có

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

mà $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

nên $\quad A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

tức là bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau. Do $ACC'A'$ là hình bình hành và $AC' = A'C$ nên $ACC'A'$ là hình chữ nhật, tức là $AA' \perp AC$. Tương tự như trên ta có $BB' \perp BD$, mà $BB' \parallel AA'$, vậy $AA' \perp mp(ABCD)$. Tương tự ta có $AB \perp (ADD'A')$. Do đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.



Hình 105

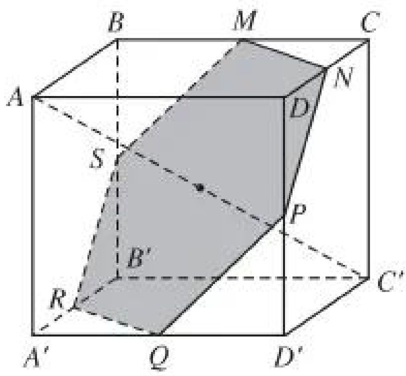
23. (h.106)

a) Ta có $\quad \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

và $\quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Vậy

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$
$$= 0.$$



Hình 106

Tương tự, ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BA'} = 0$.

Vậy $AC' \perp (A'BD)$.

Do $(A'BD) \mathbin{//} (B'CD')$ nên $AC' \perp (B'CD')$.

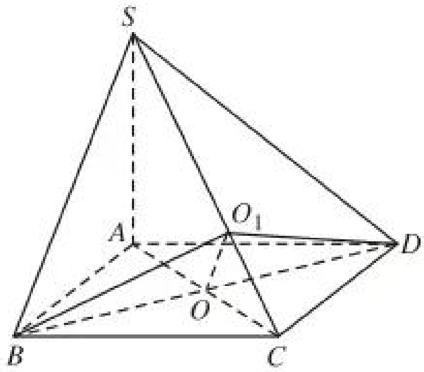
b) Gọi M là trung điểm của BC thì $MA = MC'$ (vì cùng bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$) nên M thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AC'.

Tương tự, ta chứng minh được N, P, Q, R, S cũng có tính chất đó (N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của $CD, DD', D'A', A'B', B'B$).

Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mp(α) là $MNPQRS$. Dễ thấy đó là lục giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó ta tính được diện tích của thiết diện là

$$S = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

24. (h.107) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ OO_1 vuông góc với SC, dễ thấy mp(BO_1D) vuông góc với SC. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) bằng góc giữa hai đường thẳng BO_1 và DO_1. Mặt khác $OO_1 \perp BD$, $OO_1 < OC$ mà $OC = OB$ nên $\widehat{BO_1O} > 45^o$. Tương tự $\widehat{DO_1O} > 45^o$, tức $\widehat{BO_1D} > 90^o$.



Hình 107

Như vậy, hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60^o khi và chỉ khi

$$\widehat{BO_1D} = 120^o \Leftrightarrow \widehat{BO_1O} = 60^o \text{ (vì } \Delta BO_1D \text{ cân tại } O_1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow BO = OO_1 \tan 60^o$$

$$\Leftrightarrow BO = OO_1\sqrt{3}.$$

Ta lại có

$$OO_1 = OC \sin\widehat{OCO_1} = OC \sin\widehat{ACS} = OC.\frac{SA}{SC}.$$

Như vậy

$$BO = OO_1\sqrt{3} \Leftrightarrow BO = \sqrt{3}.OC.\frac{SA}{SC} \Leftrightarrow SC = \sqrt{3}.SA$$

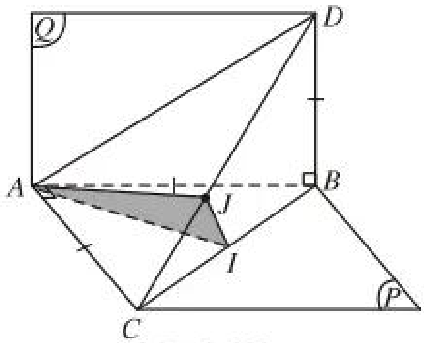
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x = a.$$

Vậy khi $x = a$ thì hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°.

25. (h.108) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$.

Do $BD \perp$ mp(ABC) nên $AI \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc). Trong mp(CDB), kẻ IJ vuông góc với CD ($J \in CD$) thì mp(AIJ) chính là mặt phẳng (α) và thiết diện phải tìm là tam giác AIJ.

Dễ thấy AIJ là tam giác vuông tại I. Vậy $S_{AIJ} = \frac{1}{2}AI.IJ.$



Hình 108

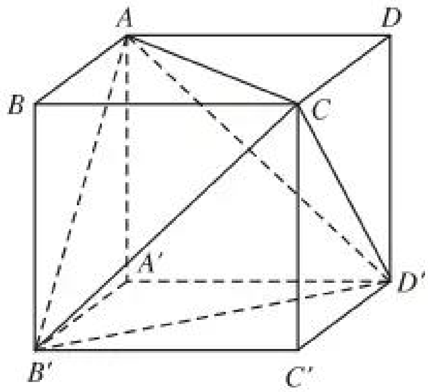
Ta có $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$$\frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow IJ = \frac{CI}{CD}.DB = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}.a = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $S_{AIJ} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

26. (h.109) a) Ta có $B'D' = BD$. Vậy $AC = B'D' \Leftrightarrow AC = BD$, khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật. Tương tự ta cũng có $ABB'A'$ và $ADD'A'$ là những hình chữ nhật. Vậy khi tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối diện bằng nhau thì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

Ngược lại, khi $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật thì dễ thấy tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối diện bằng nhau.



Hình 109

b) Ta có $BD \parallel B'D'$. Vậy $AC \perp B'D' \Leftrightarrow AC \perp BD$. Khi đó $ABCD$ là hình thoi.

Tương tự như trên ta cũng có $ABB'A'$ và $ADD'A'$ là những hình thoi. Vậy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thoi (tức sáu mặt của hình hộp là hình thoi).

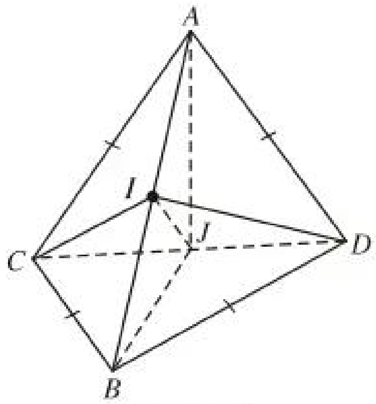
Cũng dễ thấy rằng nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thoi thì tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối diện vuông góc.

c) Khi $AB'CD'$ là tứ diện đều thì các cạnh đối diện vừa bằng nhau vừa vuông góc ; áp dụng kết quả của các câu a) và b) ta có : Khi $AB'CD'$ là tứ diện đều thì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Ngược lại nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương thì $AB'CD'$ là tứ diện đều.

27. (h.110)

a) Vì J là trung điểm của CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$. Do mp$(ACD) \perp$ mp(BCD) nên $AJ \perp$ mp(BCD). Mặt khác $AC = AD = BC = BD$ nên tam giác AJB vuông cân, suy ra $AB = AJ\sqrt{2}$, $AJ^2 = a^2 - x^2$ hay $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Vậy $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ với $a > x$.



Hình 110

Do $IA = IB$, tam giác AJB vuông tại J nên $JI = \frac{1}{2}AB$, tức là

$$IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}.$$

b) Rõ ràng là CI và DI vuông góc với AB. Vậy

$$\text{mp}(ABC) \perp \text{mp}(ABD) \Leftrightarrow \widehat{CID} = 90^\circ$$

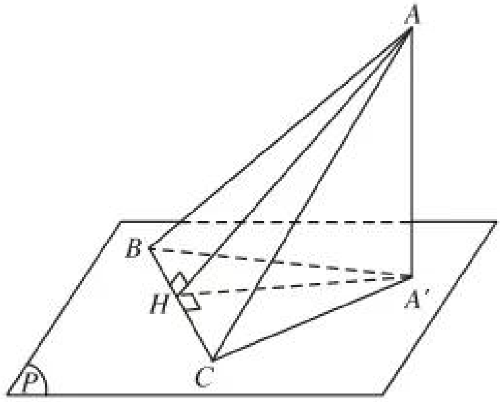
$$\Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}.2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

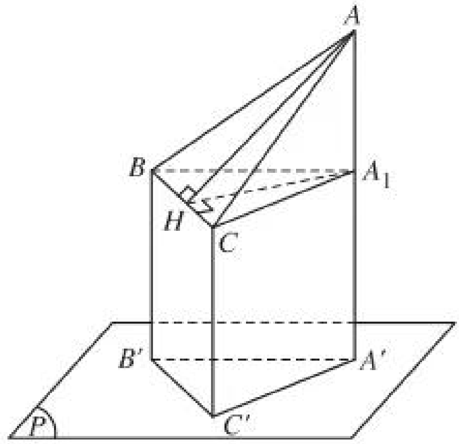
28. a) Xét trường hợp tam giác ABC có một cạnh, chẳng hạn BC nằm trong mp(P) (h.111). Gọi A' là hình chiếu của A trên mp(P). Kẻ đường cao $A'H$ của tam giác $A'BC$ ($H \in BC$) thì AH là đường cao của tam giác ABC và $\widehat{AHA'} = \varphi$, $A'H = AH\cos\varphi$.

Ta có

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC.A'H = \frac{1}{2} BC.AH\cos\varphi = S_{ABC}.\cos\varphi .$$



Hình 111

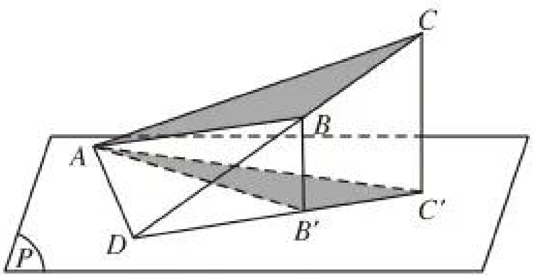


Hình 112

Trường hợp cạnh BC của tam giác ABC song song với mp(P) (h.112). Xét mp(Q) chứa BC và song song với mp(P), gọi giao điểm của AA' với mp(Q) là A_1. Khi đó dễ thấy $\Delta A_1BC = \Delta A'B'C'$; góc giữa mp(ABC) và mp(Q) bằng φ. Do đó

$$S_{A'B'C'} = S_{A_1BC} = S_{ABC}.\cos\varphi .$$

b) Xét trường hợp tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P). Ta có thể giả sử mp(P) đi qua điểm A sao cho các đỉnh B, C ở về cùng một phía đối với mp(P) (h.113). Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC và mp(P) ; B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên (P) thì $B'C'$ đi qua D. Khi đó theo trường hợp a) ta có



Hình 113

$$S_{ADC'} = S_{ADC}.\cos\varphi \ ;$$

$$S_{ADB'} = S_{ADB}.\cos\varphi.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta có

$$S_{AB'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi.$$

Như vậy trong mọi trường hợp, ta đều có

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi.$$

Chú ý

1) Nếu điểm C nằm giữa B và D thì cũng giải tương tự như trên.

2) Bằng cách chia một đa giác thành các tam giác bởi các đường chéo xuất phát từ một đỉnh của đa giác, ta có thể chứng minh được mệnh đề tổng quát sau :

Nếu $(\mathscr{H}')$ là hình chiếu của đa giác $(\mathscr{H})$ trên mp(P) thì $S_{(\mathscr{H}')} = S_{(\mathscr{H})}.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa mp(P) và mặt phẳng chứa đa giác $(\mathscr{H})$.