# §4 PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

## I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của phép quay, phải biết góc quay là góc lượng giác, tức là có thể quay theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ. Chẳng hạn phép quay tâm $O$, góc quay $\frac{\pi}{2}$ và phép quay tâm $O$, góc quay $-\frac{\pi}{2}$ là hai phép quay khác nhau.
2. Biết rằng phép quay là một phép dời hình, biết dựng ảnh của những hình đơn giản qua một phép quay cho trước.
3. Hiểu được phép đối xứng tâm là một trường hợp đặc biệt của phép quay. Nhận biết được những hình có tâm đối xứng.
4. Biết áp dụng phép quay, phép đối xứng tâm vào một số bài toán đơn giản.

## II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

**1.** Chú ý rằng góc quay là góc lượng giác. Như vậy, phép quay có tâm $O$ với góc quay $\varphi$ cũng là phép quay có tâm $O$ với góc quay $\varphi + 2k\pi$. Chẳng hạn, phép quay tâm $O$, góc quay $\frac{\pi}{6}$ cũng là phép quay tâm $O$, góc quay $-\frac{11\pi}{6}$.

**2.** Phép quay là phép dời hình thuận. Biểu thức toạ độ của phép dời hình thuận trong một hệ trục toạ độ có dạng như sau :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

Ma trận $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là ma trận trực giao và có định thức bằng 1.

Tích của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay quanh giao điểm của hai trục. Ngược lại, mọi phép quay đều có thể phân tích (bằng nhiều cách) thành tích của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau.

**3.** Tập hợp các phép quay không làm thành một nhóm (hợp thành của hai phép quay có thể là một phép tịnh tiến). Tập hợp các phép quay và phép tịnh tiến làm thành một nhóm, đó là nhóm các phép dời hình thuận. Phép đồng nhất là phép quay với tâm bất kì và góc quay $k.2\pi$. Mọi phép dời hình thuận nếu có điểm bất động thì đều là phép quay.

**4.** SGK có nói đến hình có trục đối xứng hoặc có tâm đối xứng. Nói chung, người ta định nghĩa tính đối xứng của một hình như sau : Hình $\mathscr{H}$ gọi là có tính đối xứng nếu có phép dời hình $F$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó. Chẳng hạn : Tam giác cân là hình có tính đối xứng vì phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh đáy biến tam giác đó thành chính nó. Hình bình hành có tính đối xứng vì phép đối xứng qua tâm của nó biến hình bình hành thành chính nó. Theo định nghĩa đó, bất kì một hình $\mathscr{H}$ nào cũng biến thành chính nó qua phép đồng nhất $e$, tuy nhiên đó là sự đối xứng "tầm thường".

Hãy xét một tam giác đều $ABC$ với tâm $O$, gọi $Q$ là phép quay tâm $O$ với góc quay $\frac{2\pi}{3}$ thì $Q$ biến tam giác thành chính nó, không những thế, các phép quay $Q^2$ (tức là phép $Q \circ Q$, đó là phép quay tâm $O$, góc quay $\frac{4\pi}{3}$) và $Q^3$ (tức là phép $Q \circ Q \circ Q$, đó là phép quay tâm $O$, góc quay $2\pi$, hay chính là phép đồng nhất $e$) đều biến tam giác $ABC$ thành chính nó. Bởi vậy, người ta nói rằng tam giác đều $ABC$ nhận điểm $O$ làm tâm đối xứng cấp ba. Tương tự, $n$-giác đều có tâm đối xứng cấp $n$. Hình có tâm đối xứng cấp 5 thường gặp trong thiên nhiên khi quan sát các loại hoa năm cánh.

**5.** SGK trình bày phép đối xứng tâm như là trường hợp riêng của phép quay khi góc quay bằng $\pi$. Như vậy, phép đối xứng tâm có mọi tính chất của phép quay. Chú ý rằng phép đối xứng tâm có tính chất đối hợp : Tích của một phép đối xứng tâm với chính nó là phép đồng nhất. Phép đối xứng trục cũng có tính chất đối hợp. Có thể chứng minh rằng mọi phép dời hình không phải là phép đồng nhất mà có tính chất đối hợp thì đều là phép đối xứng tâm hoặc là phép đối xứng trục.

## III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Phép đồng nhất là phép quay với tâm bất kì và góc quay là $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

**1**

Đó là các phép quay tâm $O$ với góc quay lần lượt là :

$$0 \ ; \ \frac{2\pi}{5} \ ; \quad \frac{4\pi}{5} \ ; \quad \frac{6\pi}{5} \ ; \quad \frac{8\pi}{5} \quad (\text{sai khác } 2k\pi,\ k \in \quad ).$$

**2**

Vì điểm $I(a \ ; \ b)$ là trung điểm của đoạn thẳng $MM'$ nên $\dfrac{x + x'}{2} = a$ và $\dfrac{y + y'}{2} = b$, suy ra biểu thức cần tìm.

$\boxed{?2}$ Điểm $O$ đối với mỗi chữ cái Z, S, N được chỉ ra như trên hình vẽ sau đây :


$\boxed{?3}$ Những chữ có tâm đối xứng là H, I, N, O, S, X, Z. Các chữ có tâm đối xứng nhưng không có trục đối xứng là N, S, Z.

$\boxed{?4}$ Hình thứ hai và hình thứ ba có tâm đối xứng.

$\boxed{?5}$ Vì hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ đối xứng với nhau qua $A$ nên $AM = AM_1$, hay $A$ là trung điểm của $MM_1$.

## IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

**12.** Ảnh $d'$ của đường thẳng $d$ qua phép quay $Q_{(O,\ \varphi)}$ có thể dựng như sau :

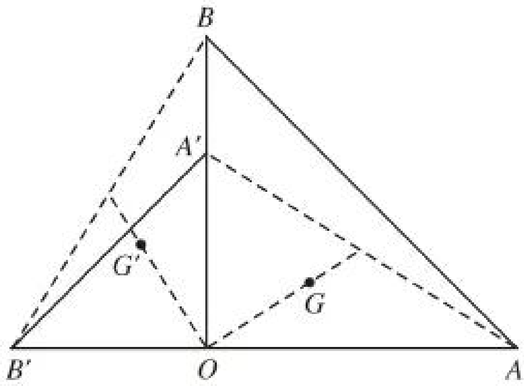
*Cách 1*. Lấy hai điểm $A$, $B$ phân biệt trên $d$, rồi dựng ảnh $A'$, $B'$ của chúng. Đường thẳng $d'$ là đường thẳng đi qua $A'$ và $B'$.

*Cách 2* (trong trường hợp $d$ không đi qua $O$). Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $d$, dựng $H'$ là ảnh của $H$. Đường thẳng vuông góc với $OH'$ tại $H'$ chính là ảnh $d'$ của $d$.

*Nhận xét*. Từ cách dựng trên ta suy ra : Phép quay với góc quay $\pm\dfrac{\pi}{2}$ biến đường thẳng $d$ thành đường thẳng $d'$ vuông góc với $d$.

**13.** (h.4) Gọi $Q$ là phép quay tâm $O$, góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ (bằng góc lượng giác $(OA, OB)$). Khi đó $Q$ biến $A$ thành $B$ và biến $A'$ thành $B'$, tức là biến tam giác $OAA'$ thành tam giác $OBB'$.

Bởi vậy $Q$ biến $G$ (trọng tâm tam giác $OAA'$) thành $G'$ (trọng tâm tam giác $OBB'$). Suy ra $OG = OG'$ và $\widehat{GOG'} = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy $GOG'$ là tam giác vuông cân tại đỉnh $O$.



*Hình 4*

**14.** a) Kẻ $OH \perp d$ ($H \in d$) thì vì $d$ không đi qua $O$ nên $H$ không trùng với $O$. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến $H$ thành $H'$ thì $O$ là trung điểm của $HH'$, và biến đường thẳng $d$ thành đường thẳng $d'$ vuông góc với $OH'$ tại $H'$. Suy ra $d$ và $d'$ song song, cách đều điểm $O$.

b) Nếu $d$ không đi qua $O$ thì theo câu a), $d' \mathbin{//} d$ nên $d'$ không trùng với $d$. Nếu $d$ đi qua $O$ thì mọi điểm $M \in d$ biến thành điểm $M' \in d$. Vậy $d'$ trùng với $d$.

**15.** Cách dựng ảnh $d'$ của $d$ như sau : Lấy hai điểm $A$, $B$ phân biệt trên $d$ rồi dựng ảnh $A'$, $B'$ của chúng. Đường thẳng $d'$ là đường thẳng đi qua $A'$ và $B'$.

Ta có thể dựng cụ thể như sau : Dựng đường tròn $(O\ ;\ R)$ sao cho nó cắt $d$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. Dựng các đường thẳng $AO$ và $BO$, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại $A'$ và $B'$. Dựng đường thẳng $d'$ đi qua $A'$ và $B'$. Phép dựng trên đây sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

**16.** a) Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng.

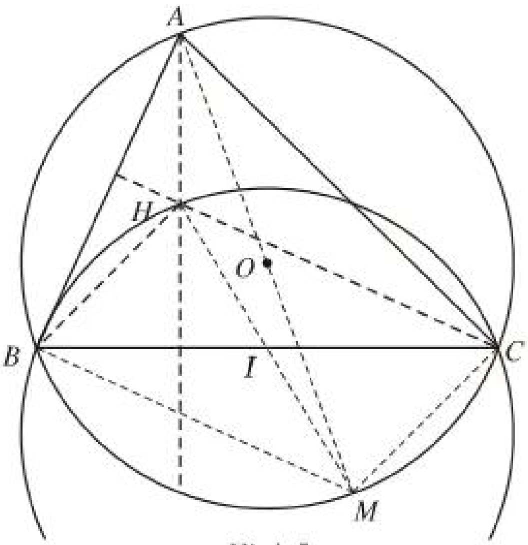
b) Tâm đối xứng là những điểm cách đều hai đường thẳng.

c) Tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm đường tròn.

d) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của elip.

e) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của hypebol.

**17.** (h.5) Chú ý rằng $A$ không trùng $B$ hoặc $C$, vì khi đó không tồn tại tam giác $ABC$. Ta vẽ đường kính $AM$ của đường tròn và chứng minh rằng trung điểm $I$ của $BC$ cũng là trung điểm của $HM$. Trong trường hợp $\Delta ABC$ vuông tại $B$ (hoặc $C$) thì $H$ trùng $B$, $M$ trùng $C$ (hoặc $H$ trùng $C$, $M$ trùng $B$) nên điều đó đúng. Trong các trường hợp khác thì $BH \parallel MC$ (vì cùng vuông góc với $AC$), và $CH \parallel MB$ (vì cùng vuông góc với $AB$) hay $BHCM$ là hình bình hành. Vậy trung điểm $I$ của $BC$ cũng là trung điểm của $MH$.



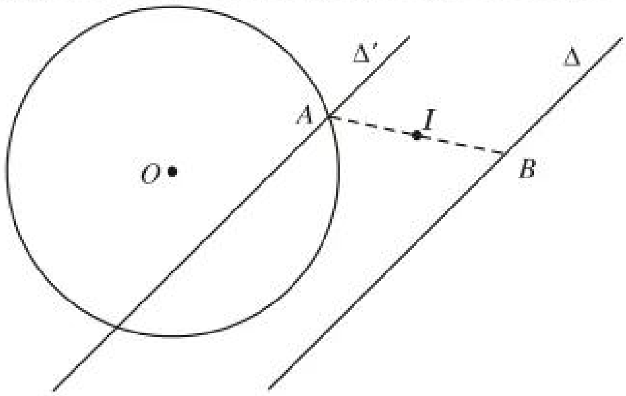
*Hình 5*

Vậy phép đối xứng qua điểm $I$ biến $M$ thành $H$.

Khi $A$ chạy trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ thì $M$ chạy trên đường tròn $(O\ ;\ R)$. Do đó, $H$ nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép đối xứng tâm với tâm $I$.

**18.** (h.6) Giả sử ta đã có điểm $A$ trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm $B$ trên $\Delta$ sao cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $B$ thành điểm $A$ nên biến đường thẳng $\Delta$ thành đường thẳng $\Delta'$ đi qua $A$. Mặt khác $A$ lại nằm trên $(O\ ;\ R)$ nên $A$ phải là giao điểm của $\Delta'$ và $(O\ ;\ R)$. Suy ra cách dựng :

Dựng đường thẳng $\Delta'$ là ảnh của $\Delta$ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$. Lấy $A$ là giao điểm (nếu



*Hình 6*

có) của $\Delta'$ và $(O ; R)$, còn $B$ là giao điểm của đường thẳng $AI$ và đường thẳng $\Delta$.

Số nghiệm hình là số giao điểm của $\Delta'$ và $(O ; R)$.

**19.** Nếu $M(x ; y)$ là một điểm nào đó và $M'(x' ; y')$ là ảnh của $M$ qua phép đối xứng tâm với tâm $I(x_0 ; y_0)$ thì $x + x' = 2x_0$ ; $y + y' = 2y_0$ hay $x = 2x_0 - x'$, $y = 2y_0 - y'$. Nếu điểm $M$ nằm trên đường thẳng $\Delta$ thì

$$ax + by + c = 0 \text{ hay } a(2x_0 - x') + b(2y_0 - y') + c = 0,$$

tức là : $$-(ax' + by' + c) + 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

Vậy điểm $M'$ nằm trên đường thẳng ảnh $\Delta'$ có phương trình

$$ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$