§5 HAI HÌNH BẰNG NHAU

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được ý nghĩa của định lí : *Nếu hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia*. Đó là định lí đảo của hệ quả : "Phép dời hình biến một tam giác thành tam giác bằng nó". Từ đó hiểu được một cách định nghĩa khác về hai tam giác bằng nhau.

2. Nắm được định nghĩa hai hình bằng nhau trong trường hợp tổng quát và thấy được sự hợp lí của định nghĩa đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Ta biết rằng : *Nếu* $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ *thì có duy nhất một phép dời hình biến* A *thành* A', B *thành* B', C *thành* C'. Tuy nhiên SGK không đề cập đến tính duy nhất vì nó không cần thiết trong vấn đề mà ta đang trình bày : Thế nào là hai hình bằng nhau ? Ta chỉ cần chỉ ra tồn tại một phép dời hình biến hình này thành hình kia là có thể nói hai hình đó bằng nhau. Chẳng hạn, nếu hai n-giác đều có cạnh bằng nhau thì có đến $2n$ phép dời hình khác nhau biến đa giác này thành đa giác kia.

2. Định lí nói trên có thể chứng minh (không dùng vectơ) như sau :

Giả sử hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau. Khi đó :

i) Nếu A trùng A', B trùng B', C trùng C' thì cố nhiên có phép đồng nhất biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

ii) Nếu A trùng A', B trùng B' còn C và C' khác nhau thì phép đối xứng qua đường thẳng AB sẽ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

iii) Nếu A trùng A' còn B không trùng B' và C không trùng C' thì dùng phép đối xứng qua đường trung trực của đoạn thẳng BB', ta đưa về trường hợp ii).

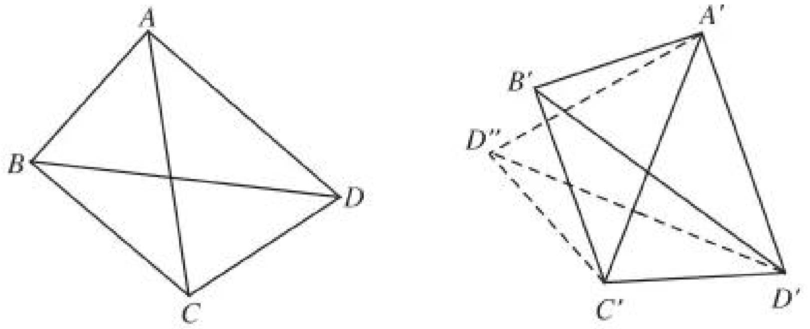
iv) Nếu A cũng không trùng với A' thì dùng phép đối xứng qua đường trung trực của AA', ta sẽ đưa về trường hợp iii).

3. Việc chứng minh định lí trên có thể không cần giảng một cách cặn kẽ. Có thể dùng hình vẽ để minh hoạ trong một số trường hợp cụ thể. Trọng tâm của bài này là đưa ra được định nghĩa "thế nào là hai hình bằng nhau" một cách hợp lí. Có thể cắt một số hình lá cây bằng giấy rồi dán lên bảng và đặt vấn đề : Các chiếc lá ấy có bằng nhau hay không ? Nếu "bằng" thì tại sao ? Nếu "không bằng" thì tại sao ? Chắc là học sinh trả lời : "Bằng vì có thể chồng khít lên nhau", khi đó thầy giáo có thể dẫn dần đi đến định nghĩa bằng phép dời hình.

III – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

20. Giả sử hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $AB = CD = A'B' = C'D'$, $AD = BC = A'D' = B'C'$. Khi đó ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác vuông bằng nhau, do đó có phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó phép dời hình F biến trung điểm O của AC thành trung điểm O' của $A'C'$. Nhưng vì O và O' lần lượt cũng là trung điểm của BD và $B'D'$ nên F cũng biến D thành D'. Vậy F biến $ABCD$ thành $A'B'C'D'$, nên theo định nghĩa, hai hình chữ nhật đó bằng nhau.

21. a) (h.7) Giả sử hai tứ giác lồi $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$ và $AC = A'C'$. Khi đó hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến ba điểm A, B, C lần lượt thành ba điểm A', B', C'. Gọi D'' là điểm đối xứng với điểm D' qua đường thẳng $A'C'$ thì hai tam giác $A'C'D'$ và $A'C'D''$ bằng nhau và theo giả thiết, cùng bằng tam giác ACD. Bởi vậy phép F chỉ có thể biến điểm D thành điểm D' hoặc D''.



Hình 7

Vì $ABCD$ là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau, $A'B'C'D'$ cũng là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng $A'C'$ và $B'D'$ cắt nhau, và do đó hai đoạn thẳng $A'C'$ và $B'D''$ không cắt nhau. Từ đó ta suy ra F biến D thành D'. Vậy F biến tứ giác $ABCD$ thành tứ giác $A'B'C'D'$ và do đó hai tứ giác đó bằng nhau.

b) Giả sử hai tứ giác lồi $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$ và góc ABC bằng góc $A'B'C'$. Khi đó $AC = A'C'$ và ta đưa về trường hợp ở câu a).

c) Có thể không bằng nhau. Hai hình thoi có cạnh bằng nhau nhưng có thể là hai hình không bằng nhau.

22. Theo định nghĩa, hai n-giác đều bằng nhau thì cạnh bằng nhau. Ngược lại, giả sử hai n-giác đều $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ có cạnh bằng nhau. Khi đó nếu gọi O và O' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đó thì dễ thấy rằng hai tam giác OA_1A_2 và $O'A_1'A_2'$ bằng nhau. Vậy có phép dời hình F biến tam giác OA_1A_2 thành tam giác $O'A_1'A_2'$. Vì hai tam giác OA_2A_3 và $O'A_2'A_3'$ cũng bằng nhau nên F biến điểm A_3 thành điểm A_3' (vì A_3 không thể biến thành A_1'). Lập luận tương tự ta cũng có F biến các điểm A_4, ..., A_n lần lượt thành các điểm A_4', ..., A_n'. Như vậy hai đa giác đều đã cho bằng nhau.

23. Ta dễ dàng chứng minh được rằng hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$ có các cạnh bằng nhau ($O_1O_2 = I_1I_2 = r_1 + r_2$, $O_2O_3 = I_2I_3 = r_2 + r_3$, $O_3O_1 = I_3I_1 = r_3 + r_1$) nên có phép dời hình F biến ba điểm O_1, O_2, O_3 lần lượt thành ba điểm I_1, I_2, I_3. Hiển nhiên khi đó F biến ba đường tròn $(O_1 ; r_1)$, $(O_2 ; r_2)$, $(O_3 ; r_3)$ lần lượt thành ba đường tròn $(I_1 ; r_1)$, $(I_2 ; r_2)$,

$(I_3\ ;\ r_3)$, tức là biến hình $\mathscr{H}_1$ thành hình $\mathscr{H}_2$. Vậy hai hình $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.

24. Một đường thẳng đi qua tâm O của hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai phần bằng nhau, vì phép đối xứng qua tâm O sẽ biến phần này thành phần kia. Bởi vậy, nếu cho hai hình bình hành, ta chỉ cần vẽ đường thẳng đi qua tâm của chúng thì đường thẳng đó sẽ chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

Nếu tâm hai hình bình hành trùng nhau thì mọi đường thẳng đi qua tâm đó đều chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.