§5 KHOẢNG CÁCH

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và đến một đường thẳng ; khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó ; khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song và biết cách tính các khoảng cách đó.

2. Nắm được khái niệm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau và biết các cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Ta không đi sâu vào việc tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau mà chỉ quan tâm đến khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy. Tuy nhiên, việc tìm đường vuông góc chung cũng được đề cập đến trong một số bài toán không quá khó (xem VD2. §5, BT 32b, BT 35, chương III, SGK).

2. Như ta đã biết, khoảng cách $d(X ; Y)$ giữa hai hình X và Y được định nghĩa : $d(X ; Y) = \inf d(A ; B)$ với $d(A ; B)$ là khoảng cách giữa hai điểm A và B, trong đó $A \in X$, $B \in Y$. Như vậy, cơ sở để xác định khoảng cách giữa hai hình là khoảng cách giữa hai điểm. Hiển nhiên với định nghĩa trên, nếu $X \cap Y \neq \varnothing$ thì $d(X\,;\,Y) = 0$. Chính vì vậy chúng ta không định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng cắt nhau, giữa đường thẳng và mặt phẳng cắt nhau hay giữa hai mặt phẳng cắt nhau. Khoảng cách giữa hai hình như vậy đều bằng không.

Mặt khác ta cũng lưu ý rằng với định nghĩa tổng quát đã nêu trên, chẳng hạn ta xét hình X là điểm A và hình Y là tập các điểm M mà $d(O\,;\,M) < 1$ (O là điểm cho trước và $OA = 2$) thì $d(X\,;\,Y) = 1$.

Lại xét Y' là hình gồm các điểm M và $d(O\,;\,M) \leq 1$ thì ta cũng có $d(X\,;\,Y') = 1$. Trong trường hợp thứ nhất không tồn tại một cặp điểm (A, B) nào với B thuộc Y để $d(A\,;\,B) = 1$; còn trong trường hợp thứ hai lại tồn tại điểm B_0 là giao của đoạn OA với Y' để $d(A; B_0) = 1$. Như vậy, trong trường hợp thứ hai, ta nói khoảng cách giữa A và B_0 là bé nhất trong tất cả các khoảng cách giữa A và một điểm B tuỳ ý thuộc Y'.

Các định nghĩa khoảng cách giữa hai hình X và Y được trình bày trong SGK đều tương tự như trường hợp thứ hai nêu trên, nghĩa là tồn tại A_0 thuộc X, B_0 thuộc Y để $d(A_0\,;\,B_0) = \inf d(A;\,B)$ với $A \in X, B \in Y$. Vì vậy, ta cũng có thể nói khoảng cách giữa hai hình X và Y là khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách giữa hai điểm A và B tuỳ ý với A thuộc X, B thuộc Y.

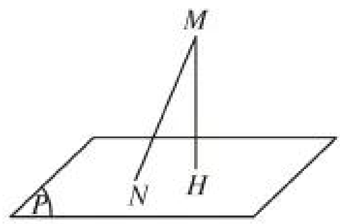
Trên cơ sở đó, giáo viên hướng dẫn học sinh giải thích rõ các $\boxed{?1}$, $\boxed{?2}$, $\boxed{?3}$, $\boxed{?4}$, $\boxed{?5}$ để hiểu rõ khái niệm khoảng cách được trình bày trong mục này.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ (h.114)

Với N bất kì thuộc (P) và H là hình chiếu của M trên (P) thì rõ ràng

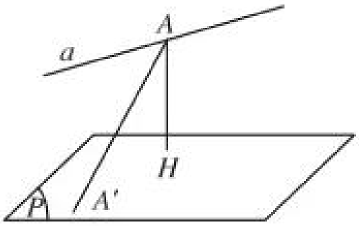
$$d(M\,;\,(P)) = MH \leq MN.$$



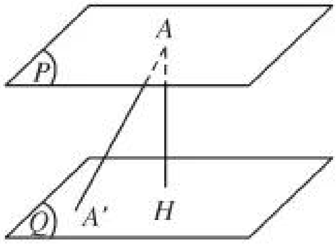
Hình 114

$\boxed{?2}$ Giải thích tương tự như $\boxed{?1}$.

?3 Lấy điểm A bất kì trên a và điểm A' bất kì trên (P). Kẻ $AH \perp (P)$ thì $d(a\ ;\ (P)) = AH \le AA'$ (h.115).



Hình 115

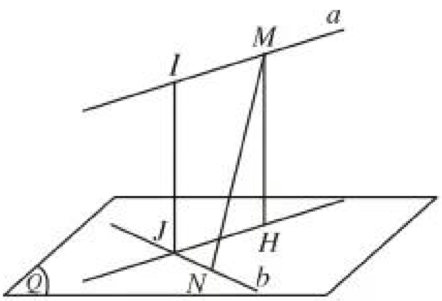


Hình 116

?4 Lấy điểm A bất kì trên (P), A' bất kì trên (Q), kẻ $AH \perp (Q)$ thì $d((P)\ ;\ (Q)) = AH \le AA'$ (h.116).

Nếu có hai đường thẳng phân biệt c và c' cùng vuông góc với cả a và b, cắt cả a và b thì c và c' cùng vuông góc với (Q), từ đó $c \parallel c'$. Như vậy, cả a và b cùng nằm trong mp(c, c'), điều này mâu thuẫn với giả thiết a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

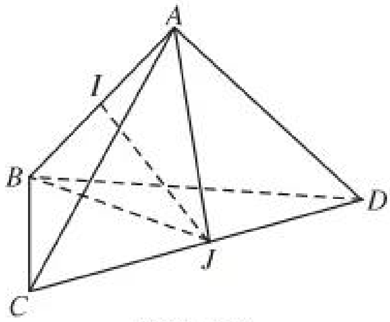
?5 Với điểm M thuộc a và điểm N thuộc b, ta kẻ $MH \perp (Q)$ thì $MH = IJ$, mặt khác $MH \le MN$. Vậy $IJ \le MN$ (h.117).



Hình 117

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

29. (h.118) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Do các tam giác ACD và BCD cân tại A và B nên AJ và BJ cùng vuông góc với CD, suy ra $CD \perp IJ$. Tương tự như trên, ta có $IJ \perp AB$. Vậy $d(AB\ ;\ CD) = IJ$.



Hình 118

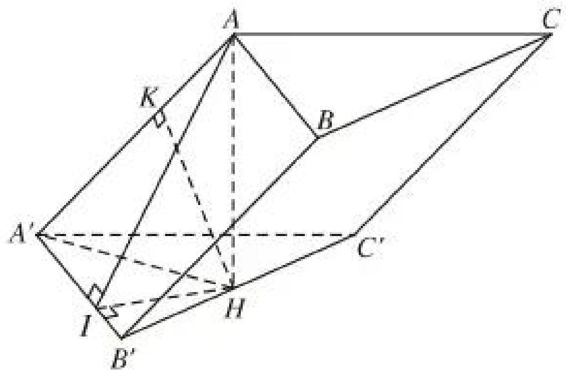
Ta có

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = AD^2 - JD^2 - AI^2$$

$$= a^2 - \frac{c'^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{4a^2 - (c'^2 + c^2)}{4}.$$

Vậy $IJ = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (c'^2 + c^2)}$ với điều kiện $4a^2 > c^2 + c'^2$.

30. (h.119) Do $AH \perp (A'B'C')$ nên $\widehat{AA'H}$ chính là góc giữa AA' và mp$(A'B'C')$. Theo giả thiết thì $\widehat{AA'H} = 30^{\circ}$.



Hình 119

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính là AH, ta có

$$AH = AA'\sin 30^{\circ} = \frac{a}{2}.$$

b) Dễ thấy $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a, H thuộc đường thẳng $B'C'$ mà $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A'H \perp B'C'$ và H là trung điểm của $B'C'$. Mặt khác $AH \perp B'C'$ nên $AA' \perp B'C'$.

Kẻ đường cao HK của tam giác $AA'H$ thì HK chính là khoảng cách giữa AA' và $B'C'$. Do $AA'.HK = AH.A'H$ nên

$$HK = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Chú ý. Trong bài tập này, giáo viên có thể đưa thêm các yêu cầu sau :

c) Tính góc giữa đường thẳng BC và AC'.

d) Tính góc giữa mp$(ABB'A')$ và mp$(A'B'C')$.

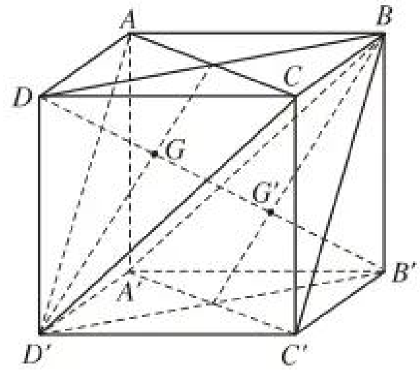
Hướng dẫn

c) $\widehat{AC'H}$ là góc giữa BC và AC' ; $\widehat{AC'H} = 45^{\circ}$.

d) $\widehat{AIH}$ là góc giữa mp$(ABB'A')$ và mp$(A'B'C')$, ở đó AI vuông góc với $A'B'$ tại I ; $\tan\widehat{AIH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

31. (h.120) Ta có CD' nằm trong mp(ACD') và BC' nằm trong mp$(A'BC')$, mà mp(ACD') song song với mp$(A'BC')$ và CD', BC' chéo nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(A'BC')$ bằng khoảng cách giữa BC' và CD'. Mặt khác, $B'D$ cắt hai mặt phẳng (ACD') và $(A'BC')$ lần lượt tại G, G' và $DG = GG' = G'B'$ (BT 37, chương II, SGK). Đường thẳng $B'D$ có hình chiếu trên mp($ABCD$) là DB mà $AC \perp DB$ nên theo định lí ba đường vuông góc thì $DB' \perp AC$; cũng tương tự như trên ta có $DB' \perp AD'$. Suy ra $DB' \perp$ mp(ACD').

Như vậy $d(CD' ; BC') = \dfrac{DB'}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Hình 120

32. (h.121) a) Xét tứ diện $DACD'$ có DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên khoảng cách DH từ D đến mặt phẳng (ACD') được tính bởi hệ thức

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$

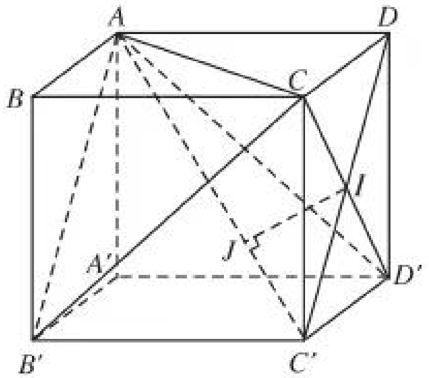
(BT 17, chương III, SGK). Ta có

$$DC = a, DD' = a,$$

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = DA^2 + DC^2 + CC'^2$$

hay $\quad 4a^2 = DA^2 + a^2 + a^2,$

tức là $\quad DA^2 = 2a^2.$



Hình 121

Vậy

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2}.$$

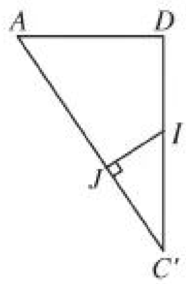
Do đó $DH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Vì $CD = DD' = a$ nên $CD' \perp C'D$. Mặt khác $AD \perp (CDD'C')$ nên $CD' \perp AC'$ và $CD' \perp$ mp($AC'D$). Gọi giao điểm của CD' với mp($AC'D$) là I. Trong mp($AC'D$) kẻ IJ vuông góc với AC' tại J thì IJ là đường vuông góc chung của AC' và CD'.

Ta tính khoảng cách giữa AC' và CD' (h.122). Dễ thấy

$$\frac{IJ}{AD} = \frac{IC'}{AC'},$$

suy ra $\quad IJ = AD.\dfrac{C'D}{2AC'}.$

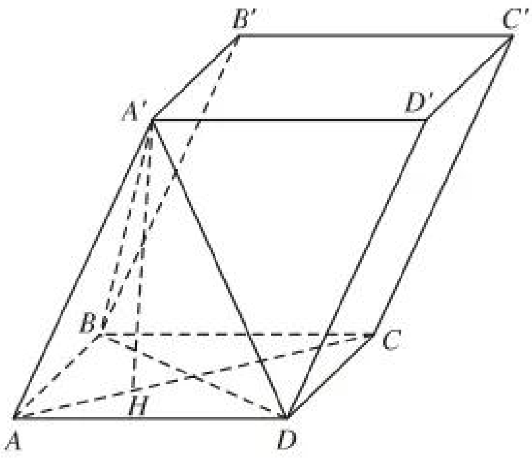


Hình 122

Mặt khác $C'D = a\sqrt{2}$. Vậy

$$IJ = a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2.2a} = \frac{a}{2}.$$

33. (h.123) Từ giả thiết suy ra các tam giác $A'AD$, BAD, $A'AB$ là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng 60^o nên chúng là các tam giác đều. Như vậy tứ diện $A'ABD$ có các cạnh cùng bằng a hay $A'ABD$ là tứ diện đều. Khi đó hình chiếu của A' trên mp$(ABCD)$ chính là trọng tâm H của tam giác đều ABD. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ chính là độ dài $A'H$. Ta có



Hình 123

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}.$$

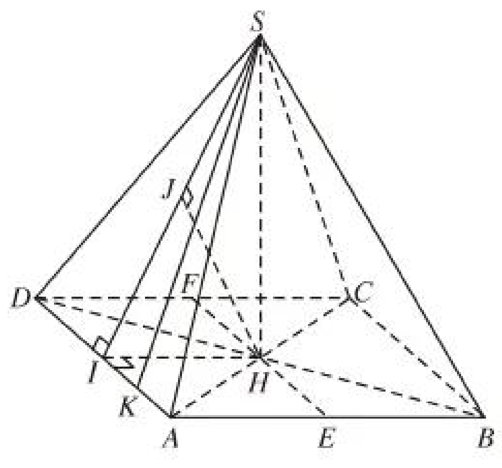
Vậy $A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

34. (h.124)

a) Vì

$$SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$$

nên hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H mà $HA = HB = HC = HD$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên H chính là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ S đến mp$(ABCD)$ bằng SH. Ta có :



Hình 124

$$SH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4}$$

$$= 2a^2 - \frac{AB^2 + BC^2}{4} = 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ tức là } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Vì EF // AD nên EF // mp(SAD), mặt khác SK nằm trong mp(SAD) nên khoảng cách giữa EF và SK chính là khoảng cách giữa EF và mp(SAD), đó cũng chính là khoảng cách từ H đến mp(SAD). Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD.

Tính $d(EF\ ;\ SK)$:

Gọi I là trung điểm của AD, kẻ đường cao HJ của tam giác vuông SHI thì $HJ \perp$ mp(SAD), do đó $d(H\ ;\ (SAD)) = HJ$. Ta có :

$$HJ.SI = SH.HI,$$

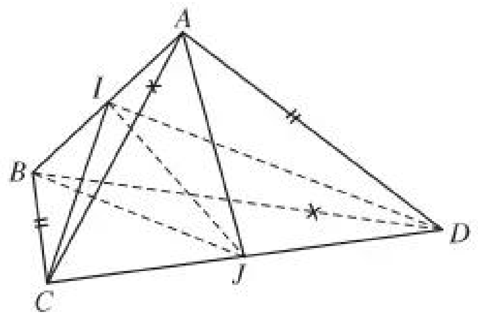
$$SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}.$$

Từ đó
$$HJ = \frac{SH.HI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy, khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD và bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

35. (h.125)

a) Vì $AC = BD$, $AD = BC$ nên tam giác ACD bằng tam giác BDC, từ đó hai trung tuyến tương ứng AJ và BJ bằng nhau (ở đó J là trung điểm của CD). Gọi I là trung điểm của AB thì ta có $JI \perp AB$. Tương tự như trên ta cũng có $JI \perp CD$. Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.



Hình 125

b) Điều ngược lại của kết luận nêu ra trong bài toán cũng đúng, tức là nếu $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$, với I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $AC = BD$; $AD = BC$.

Thật vậy, vì $IJ \perp AB$, I là trung điểm của AB nên $AJ = BJ$. Mặt khác

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2}\ ;$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2}.$$

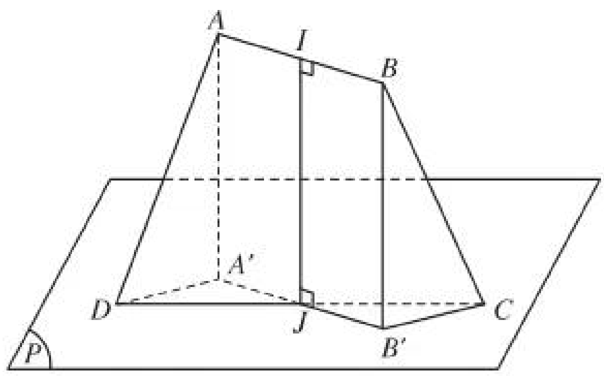
Từ đó ta có $$AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2. \quad (1)$$

Tương tự như trên ta cũng có

$$CB^2 + CA^2 = DB^2 + DA^2. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra $AD^2 - BC^2 = BC^2 - DA^2$, tức là $DA = BC$ và từ (1) ta cũng có $AC = BD$.

Chú ý. Có thể chứng minh kết quả trên như sau : Xét mp(P) đi qua CD và song song với AB. Do IJ là đường vuông góc chung của AB và CD nên $IJ \perp (P)$. Gọi A', B' là hình chiếu của A, B trên (P) thì J, A', B' thẳng hàng và do $IA = IB$ nên $JA' = JB'$, từ đó $\Delta JCB' = \Delta JDA'$, tức là $B'C = A'D$. Khi ấy hai tam giác vuông $BB'C$ và $AA'D$ bằng nhau, từ đó suy ra $BC = AD$. Lập luận tương tự như trên, ta suy ra $AC = BD$ (h.126).



Hình 126