§5 PHÉP CHIẾU SONG SONG

I – MỤC TIÊU

Làm cho HS nắm được :

1. Thế nào là phép chiếu song song theo một phương lên một mặt phẳng.
2. Các tính chất của phép chiếu song song, đặc biệt là tính chất giữ nguyên sự thẳng hàng của các điểm, giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
3. Thế nào là một hình biểu diễn của một hình trong không gian và cách vẽ các hình biểu diễn.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Phép chiếu song song trong sách giáo khoa được trình bày tương đối đầy đủ. Ngoài định nghĩa còn nói rõ ba bất biến của phép chiếu song song : tính thẳng hàng, tính song song, tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương. Mặt khác, cũng làm cho học sinh thấy rằng độ dài của đoạn thẳng, độ lớn của góc và tỉ số của hai đoạn thẳng khác phương không phải là những bất biến qua phép chiếu song song.
2. Trong §5 này cần cho HS thấy rõ hai ứng dụng của phép chiếu song song : dùng phép chiếu song song để vẽ hình biểu diễn của hình không gian và áp dụng phép chiếu song song để giải toán.
3. Không quá đi sâu vào chứng minh chi tiết các tính chất của phép chiếu song song mà chỉ cần giải thích rõ ràng và minh hoạ chúng bằng những hình vẽ trực quan.
4. Cần cho học sinh hiểu rằng một hình có thể có nhiều hình biểu diễn khác nhau (bởi vì ta có thể chiếu lên một mặt phẳng theo những phương khác nhau hoặc ta có thể chiếu lên những mặt phẳng khác nhau). Nhưng khi nghiên cứu một hình $\mathscr{H}$ nào đó, ta cần chọn những hình biểu diễn "tốt" của $\mathscr{H}$ bằng cách chọn những phương chiếu thích hợp (chẳng hạn phương chiếu không song song với một cạnh hay một mặt nào đó của hình $\mathscr{H}$). Ví dụ như khi vẽ hình biểu diễn của một hình hộp hoặc hình tứ diện, ta không nên chọn

phương chiếu song song với một cạnh hay một đường chéo, hoặc phương chiếu song song với một mặt, hoặc với một mặt chéo nào. Hình biểu diễn của hình hộp trên hình vẽ 59, hình biểu diễn của tứ diện trên hình vẽ 56 trong sách này là những hình biểu diễn "tốt" của hình hộp và của tứ diện.

5. Ta có thể chứng minh tính chất 3 như sau :

Giả sử AB và CD là hai đoạn thẳng song song (hoặc cùng nằm trên một đường thẳng) có hình chiếu song song trên mp(P) là $A'B'$ và $C'D'$. Ta phải chứng minh

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

a) Nếu AB và CD cùng nằm trên đường thẳng a thì $A'B'$ và $C'D'$ cùng nằm trên đường thẳng a' là hình chiếu của a. Khi đó, điều phải chứng minh được suy ra từ định lí Ta-lét trên mp(a, a') (h.61a).

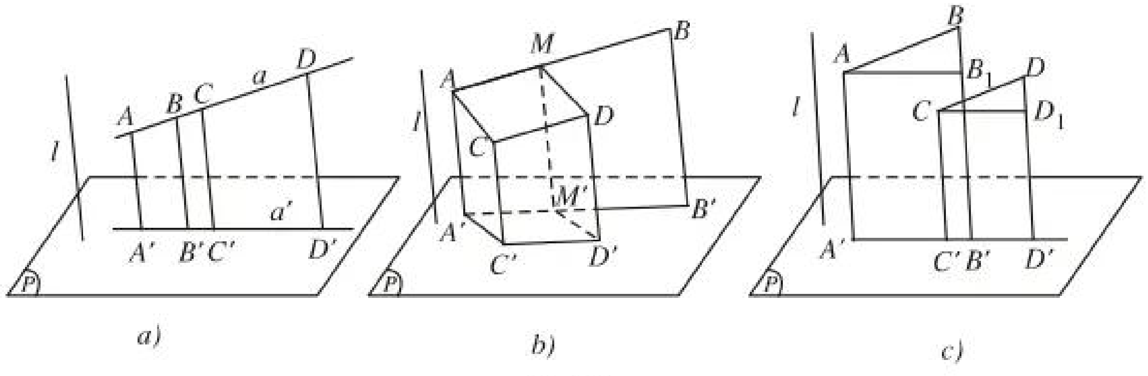
b) Nếu AB // CD thì theo tính chất 2, $A'B'$ // $C'D'$ hoặc $A'B'$ và $C'D'$ cùng nằm trên một đường thẳng.

• Ta xét trường hợp $A'B'$ // $C'D'$ (h.61b). Lấy trên đường thẳng AB điểm M sao cho $ACDM$ là một hình bình hành. Gọi M' là hình chiếu của M trên mp(P) thì M' nằm trên $A'B'$ và

$$\frac{A'B'}{A'M'} = \frac{AB}{AM}. \qquad (1)$$

Nhưng $A'C'D'M'$ cũng là hình bình hành (có các cạnh đối song song) nên $A'M' = C'D'$. Ngoài ra $AM = CD$, nên từ (1) ta suy ra

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$



Hình 61

• Nếu $AB \parallel CD$ và $A'B'$, $C'D'$ cùng nằm trên một đường thẳng, ta lấy điểm B_1 trên BB' và D_1 trên DD' sao cho $AA'B'B_1$ và $CC'D'D_1$ là những hình bình hành (h.61c). Khi đó ta có $AB_1 = A'B'$, $CD_1 = C'D'$. Hai tam giác ABB_1 và CDD_1 là hai tam giác đồng dạng (có ba cạnh tương ứng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng) nên $\frac{AB_1}{CD_1} = \frac{AB}{CD}$ hay $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Hình chiếu song song của điểm M thuộc mặt phẳng chiếu (P) là điểm M.

$\boxed{?2}$ Khi a song song với phương chiếu l thì hình chiếu song song của a (hoặc một phần của a) là giao điểm của a với mặt phẳng chiếu (P).

$\boxed{?3}$ Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của a cũng chính là đường thẳng a.

$\boxed{?4}$ Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu song song của a đi qua điểm A.

$\boxed{?5}$ Hình biểu diễn của hình bình hành nói chung là hình bình hành (đặc biệt, là một đoạn thẳng).

$\boxed{?6}$ Hình biểu diễn của hình thang nói chung là hình thang (đặc biệt, là một đoạn thẳng).

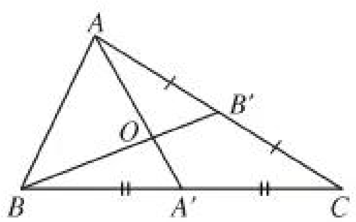
$\boxed{?7}$ Hình biểu diễn của hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông nói chung là hình bình hành (đặc biệt, là một đoạn thẳng).

$\boxed{?8}$ Phải.

$\boxed{?9}$ Có thể.

1

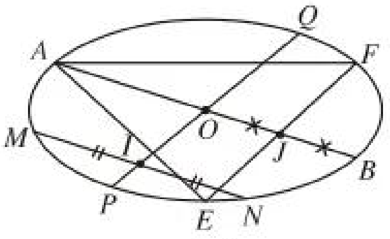
Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm của tam giác đó, nên hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều chính là trọng tâm O của tam giác ABC (h.62).



Hình 62

2

a) Vẽ dây cung MN và một dây cung PQ đi qua tâm O của elip và trung điểm I của MN. Khi đó MN và PQ lần lượt là hình biểu diễn của một dây cung và một đường kính vuông góc với dây cung đó của đường tròn (h.63).



Hình 63

b) Sau bước a), vẽ dây cung AB qua O và song song với MN. Khi đó PQ và AB là hình biểu diễn của hai đường kính vuông góc của đường tròn.

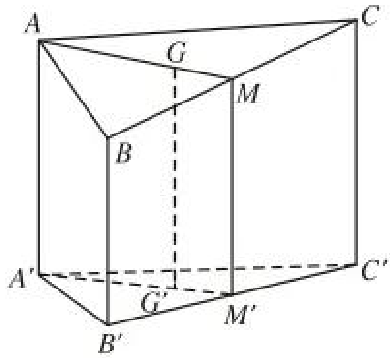
c) Sau hai bước a) và b), ta vẽ được hai dây cung AB và PQ của elip là hình biểu diễn của hai đường kính vuông góc của đường tròn. Từ trung điểm J của OB, vẽ dây cung EF song song với PQ. Khi đó tam giác AEF là hình biểu diễn của một tam giác đều nội tiếp đường tròn đã cho (h.63).

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

40. Mệnh đề c) đúng.

41. Các mệnh đề b), c), d), f) đúng.

42. (h.64) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và G' là hình chiếu song song của nó. Gọi M là trung điểm của BC thì A, G, M thẳng hàng. Gọi M' là hình chiếu của M. Khi đó, theo tính chất của phép chiếu song song ta có :



Hình 64

A', G', M' thẳng hàng và

$$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}. \qquad (1)$$

B', M', C' thẳng hàng và

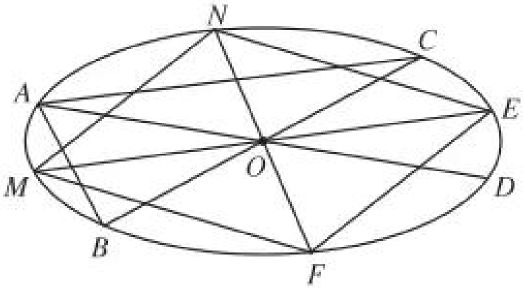
$$\frac{B'M'}{M'C'} = \frac{BM}{MC} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

43. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện $ABCD$. Lấy M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trung điểm G của MN sẽ biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện.

44. Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy B và C là hai điểm trên elip sao cho B, O, C thẳng hàng và một điểm A thuộc elip sao cho A khác B và C. Khi đó, tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

45. (h.65) Theo bài 44, vẽ tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn. Qua O ta kẻ hai dây ME và NF của elip lần lượt song song với AC và AB. Khi đó tứ giác $MNEF$ là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

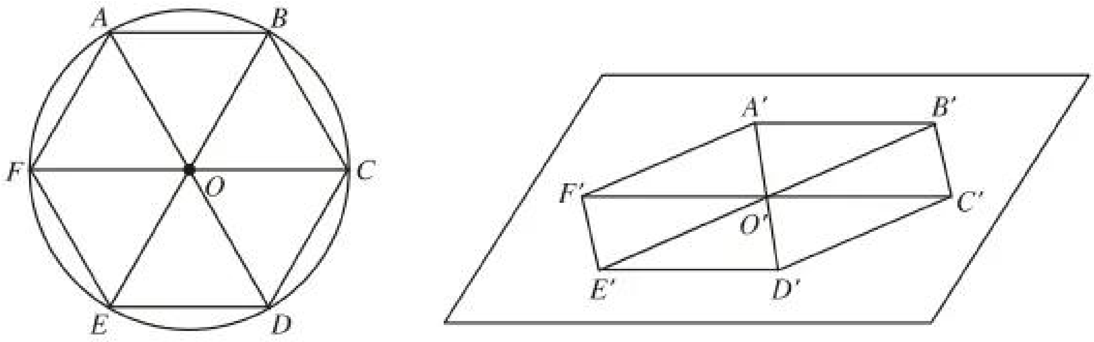


Hình 65

46. Xét hình lục giác đều $ABCDEF$ (h.66a), ta nhận thấy :

• Tứ giác $OABC$ là hình thoi.

• Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O.



a) *b)*

Hình 66

Từ đó ta suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều $ABCDEF$ như sau :

• Vẽ hình bình hành $O'A'B'C'$ biểu diễn cho hình thoi $OABC$.

• Lấy các điểm D', E', F' lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua O', ta được hình biểu diễn $A'B'C'D'E'F'$ của hình lục giác đều $ABCDEF$ (h.66b).

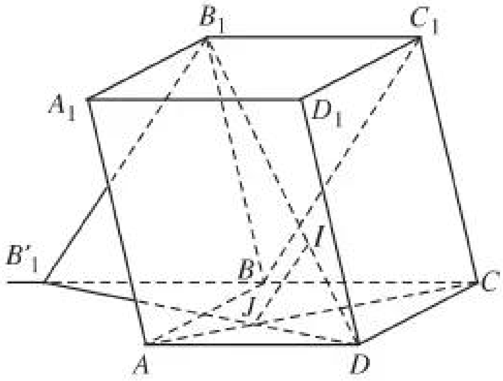
47. (h.67) Giả sử ta đã tìm được $I \in B_1D$, $J \in AC$ sao cho $IJ \mathbin{/\!/} BC_1$. Xét phép chiếu song song theo phương BC_1 lên mp($ABCD$). Khi đó hình chiếu của các điểm D, I, B_1 lần lượt là D, J và B'_1. Do D, I, B_1 thẳng hàng nên D, J, B'_1 thẳng hàng. Vậy J chính là giao điểm của hai đường thẳng B'_1D và AC. Từ đó ta có thể tìm I, J như sau :

• Dựng B'_1 là hình chiếu của B_1 qua phép chiếu song song ở trên ($BC_1B_1B'_1$ là hình bình hành).

• Dựng J là giao điểm của B'_1D với AC.

• Trong mp($B_1B'_1D$), kẻ JI song song với $B_1B'_1$ cắt B_1D tại I.

Rõ ràng I và J thoả mãn điều kiện của bài toán.



Hình 67

Dễ thấy B'_1 thuộc đường thẳng BC và $AD = \dfrac{1}{2}B'_1C$.

Từ đó suy ra :

$$\frac{ID}{IB_1} = \frac{JD}{JB'_1} = \frac{AD}{B'_1C} = \frac{1}{2}.$$

Vậy ta có : $\dfrac{ID}{IB_1} = \dfrac{1}{2}$.