# §6 PHÉP VỊ TỰ

## I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được định nghĩa của phép vị tự, tâm vị tự, tỉ số vị tự và các tính chất của phép vị tự.
2. Biết dựng ảnh của một số hình đơn giản qua phép vị tự, đặc biệt là ảnh của đường tròn. Biết xác định tâm vị tự của hai đường tròn cho trước.
3. Biết áp dụng phép vị tự để giải một số bài toán đơn giản.

## II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Tập hợp các phép vị tự không làm thành một nhóm, vì ta dễ thấy rằng tích của phép vị tự $V_{(O,\,k)}$ và phép vị tự $V_{(O',\,k')}$ là một phép vị tự nếu $k.k' \neq 1$, và là một phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$ nếu $k.k' = 1$. Tích của một phép vị tự và một phép tịnh tiến là một phép vị tự. Bởi vậy, tập hợp các phép vị tự và tịnh tiến làm thành một nhóm, đặc trưng bởi tính chất biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng).
2. Đối với các phép dời hình, ta đã trình bày theo sơ đồ : Dựa vào phép tịnh tiến, ta định nghĩa phép dời hình và nêu ra các tính chất của nó, sau đó mới trình bày các phép dời hình cụ thể. Đối với phép đồng dạng thì ta lại trình

bày một phép cụ thể trước, đó là phép vị tự. Các tính chất của phép đồng dạng được suy ra từ các tính chất của phép vị tự và phép dời hình sau khi có định lí nói rằng mọi phép đồng dạng đều là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

**3.** Phép vị tự có nhiều ứng dụng trong giải toán, một ứng dụng đẹp của phép vị tự là chứng minh bài toán về đường thẳng Ơ-le của tam giác (đã biết trong SGK Hình học 10 nâng cao).

GV nên cho học sinh biết cách xác định tâm vị tự của hai đường tròn kể cả trong những trường hợp đặc biệt như hai đường tròn tiếp xúc nhau, hoặc một đường tròn chứa đường tròn kia.

## III – TRẢ LỜI ?  VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

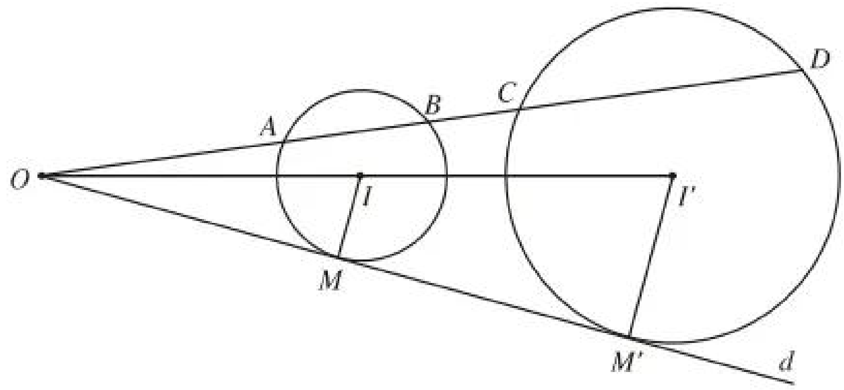
**?1** – Đường thẳng đi qua tâm vị tự.

– Nếu $k = -1$ thì mọi đường tròn có tâm trùng với tâm vị tự đều biến thành chính nó. Trong trường hợp $k$ khác 1 và $-1$ thì không có đường tròn nào biến thành chính nó.

**1**

Trước hết, ta chú ý rằng nếu phép vị tự tâm $O$, tỉ số $k$ biến hai điểm $A$, $B$ lần lượt thành hai điểm $A'$, $B'$ thì $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$ (vì cùng bằng $|k|$). Bởi vậy $OA > OB$ khi và chỉ khi $OA' > OB'$.

Bây giờ, giả sử đường thẳng $d$ đi qua tâm vị tự $O$ cắt $(I\ ;\ R)$ tại $A$ và $B$, cắt $(I'\ ;\ R')$ tại $C$ và $D$. Ta có thể kí hiệu các giao điểm sao cho $OA < OB$ và $OC < OD$ (h.8). Khi đó phép vị tự ấy biến $A$ thành $C$ và biến $B$ thành $D$.




*Hình 8*

Nếu đường thẳng $d$ tiếp xúc với $(I\ ;\ R)$ tại $M$ thì $IM \perp d$. Nếu gọi $M'$ là ảnh của $M$ qua phép vị tự thì $M'$ là giao điểm của $d$ và $(I'\ ;\ R')$, $I'M' \perp d$. Vậy $d$ cũng tiếp xúc với $(I'\ ;\ R')$ tại $M'$ là ảnh của $M$.

**2**

1) Ta có $OA' \perp BC$ mà $BC \parallel B'C'$ nên $OA' \perp B'C'$. Tương tự ta cũng có $OB' \perp A'C'$. Vậy $O$ là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.

2) Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$. Bởi vậy phép vị tự $V$ (tâm $G$, tỉ số $-2$) biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác $ABC$.

3) Điểm $O$ là trực tâm của tam giác $A'B'C'$ nên phép vị tự $V$ biến $O$ thành trực tâm $H$ của tam giác $ABC$ (vì qua phép vị tự, hai đường thẳng vuông góc với nhau phải biến thành hai đường thẳng vuông góc với nhau). Từ đó suy ra $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ và do đó, ba điểm $G$, $H$, $O$ thẳng hàng.

$\boxed{?2}$ Vì $O'$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nên phép vị tự $V$ biến $O'$ thành $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Như vậy $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GO'}$. Từ đó dễ dàng suy ra $O'$ là trung điểm của $OH$.

## IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

**25.** Phép đối xứng qua tâm $O$ là phép vị tự tâm $O$ tỉ số $-1$.

Phép đối xứng trục không phải là phép vị tự vì các đường thẳng nối cặp điểm tương ứng không đồng quy.

Phép đồng nhất là phép vị tự với tâm là điểm bất kì và tỉ số $k = 1$.

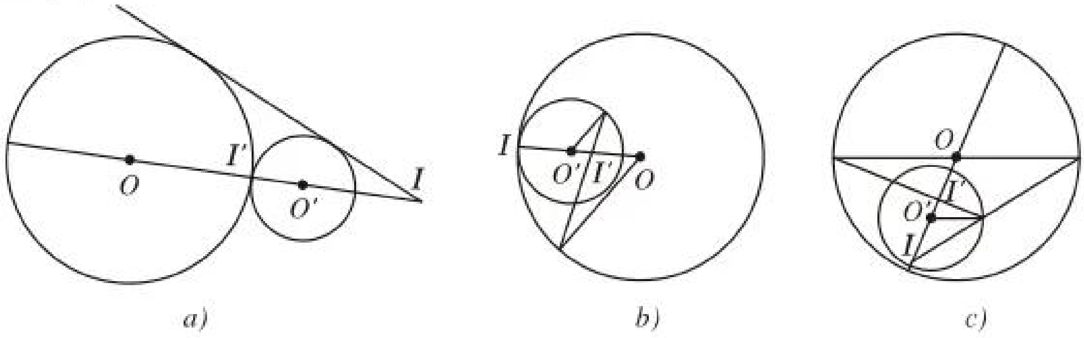
Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không phải là phép vị tự vì không có điểm nào biến thành chính nó.

**26.** a) Đúng. Tâm vị tự là điểm bất động.

b) Sai. Phép vị tự tỉ số $k = 1$ có mọi điểm đều là điểm bất động.

c) Đúng. Phép vị tự tâm $O$ luôn có điểm bất động $O$, nếu nó còn điểm bất động nữa là $M$ (tức là ảnh $M'$ của $M$ trùng với $M$) thì vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ nên $k = 1$. Vậy phép vị tự đó là phép đồng nhất nên mọi điểm đều bất động.

**27.** (h.9) Gọi $I$ là tâm vị tự ngoài, $I'$ là tâm vị tự trong của hai đường tròn $(O)$ và $(O')$.



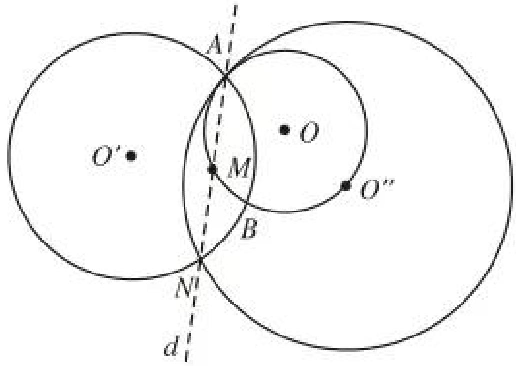

*Hình 9*

a) Nếu $(O)$ và $(O')$ tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm $I'$ là tâm vị tự trong, giao điểm của $OO'$ với tiếp tuyến chung ngoài của $(O)$ và $(O')$ (nếu có) là tâm vị tự ngoài (h.9a).

b) Nếu $(O)$ và $(O')$ tiếp xúc trong thì tiếp điểm $I$ là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong $I'$ xác định như trên hình vẽ 9b.

c) Nếu $(O)$ chứa $(O')$ thì xác định $I$ và $I'$ như trên hình vẽ 9c (đặc biệt, khi $O$ trùng $O'$ thì $I$ và $I'$ trùng $O$).

**28.** (h.10) Giả sử đã dựng được đường thẳng $d$ theo yêu cầu của bài toán. Vì $M$ là trung điểm của $AN$ nên $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$. Như vậy, gọi $V$ là phép vị tự tâm $A$ tỉ số 2 thì $V$ biến $M$ thành $N$. Nếu $V$ biến $(O)$ thành $(O'')$ thì $(O'')$ phải đi qua $N$. Vậy $N$ là giao điểm của hai đường tròn $(O')$ và $(O'')$. Từ đó dễ dàng suy ra cách dựng.

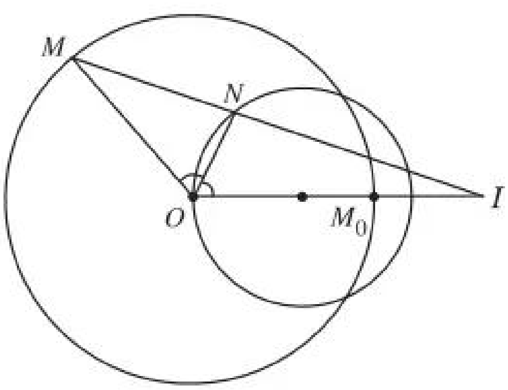



*Hình 10*

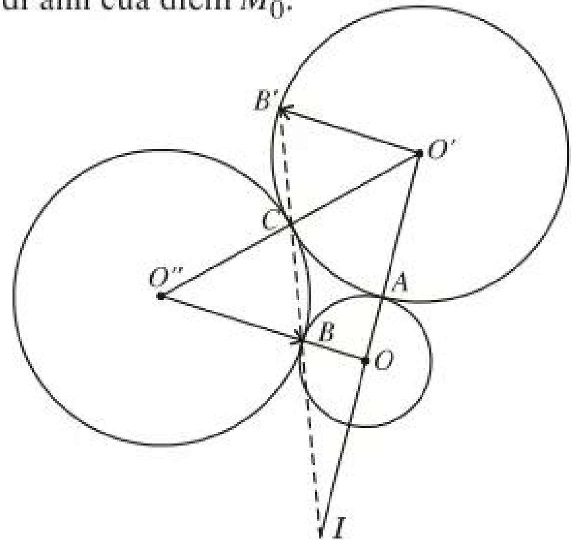
**29.** (h.11) Đặt $IO = d$ $(d \neq 0)$. Theo tính chất đường phân giác của tam giác $MOI$, ta có $\dfrac{IN}{NM} = \dfrac{IO}{OM} = \dfrac{d}{R}$. Suy ra $\dfrac{IN}{IN + NM} = \dfrac{d}{d + R} \Leftrightarrow \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{d}{d + R}$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên đẳng thức trên có nghĩa là : $\overrightarrow{IN} = \dfrac{d}{d + R}\overrightarrow{IM}$. Nếu gọi $V$ là phép vị tự tâm $I$ tỉ số $k = \dfrac{d}{d + R}$ thì $V$ biến điểm $M$ thành điểm $N$. Khi $M$ ở vị trí $M_0$ trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ sao cho

$\widehat{IOM_0} = 0^o$ thì tia phân giác của góc $\widehat{IOM_0}$ không cắt $IM$. Điểm $N$ không tồn tại. Vậy khi $M$ chạy trên $(O\ ;\ R)$ ($M$ khác $M_0$) thì quỹ tích điểm $N$ là ảnh của $(O\ ;\ R)$ qua phép vị tự $V$ bỏ đi ảnh của điểm $M_0$.




*Hình 11*




*Hình 12*

**30.** (h.12) Kéo dài $BC$ cắt $(O')$ tại $B'$. Vì $C$ là tâm vị tự trong của $(O')$ và $(O'')$ nên hai vectơ $\overrightarrow{O'B'}$ và $\overrightarrow{O''B}$ ngược hướng. Vì $B$ là tâm vị tự trong của $(O)$ và $(O'')$ nên hai vectơ $\overrightarrow{O''B}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng. Từ đó suy ra đường thẳng $BB'$, cũng chính là đường thẳng $BC$, luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài $I$ của $(O)$ và $(O')$.