§7 PHÉP ĐỒNG DẠNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của phép đồng dạng, biết rằng phép dời hình và phép vị tự là những trường hợp riêng của phép đồng dạng.
2. Hiểu được khái niệm hợp thành của hai phép biến hình nào đó và do đó hiểu được ý nghĩa của định lí : *Mọi phép đồng dạng đều là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.*

3. Từ định lí trên, nắm được tính chất của phép đồng dạng và hình dung được phép đồng dạng biến một hình $\mathscr{H}$ thành hình như thế nào. Cũng từ đó học sinh nhận biết về sự đồng dạng của các hình mà ta thường gặp trong thực tế.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Tập hợp các phép đồng dạng trong mặt phẳng làm thành một nhóm gọi là nhóm đồng dạng của mặt phẳng Ơ-clít, mà nhóm dời hình là một nhóm con. Hình học Ơ-clít cũng có thể xem như hình học của nhóm đồng dạng nếu chúng ta không quan tâm đến kích thước của hình.

2. Phép đồng dạng gọi là *thuận* nếu không làm thay đổi hướng của mặt phẳng, và gọi là *nghịch* nếu nó làm thay đổi hướng của mặt phẳng. Chú ý rằng phép vị tự luôn luôn là một phép đồng dạng thuận, bởi vậy phép đồng dạng thuận là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình thuận, còn phép đồng dạng nghịch là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình nghịch.

Người ta chứng minh được rằng : *Mọi phép đồng dạng thuận đều hoặc là một phép tịnh tiến, hoặc là tích của một phép vị tự và một phép quay quanh tâm vị tự, còn mọi phép đồng dạng nghịch đều hoặc là một phép đối xứng trượt, hoặc là tích của một phép vị tự và phép đối xứng qua đường thẳng chứa tâm vị tự.*

III – TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Phép dời hình cũng là phép đồng dạng với tỉ số $k = 1$. Phép vị tự với tỉ số k là phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng $|k|$.

Lấy hai điểm M, N bất kì. Nếu phép vị tự V biến M, N lần lượt thành M_1, N_1 thì ta có $M_1N_1 = |k|MN$. Bây giờ, nếu phép dời hình D biến M_1, N_1 lần lượt thành M', N' thì ta có $M'N' = M_1N_1 = |k|MN$. Vì F là hợp thành của V và D nên F biến M, N thành M', N', mà $M'N' = |k|MN$, nên F là một phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

$\boxed{?2}$ Phép đồng dạng nói chung không có tính chất *biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó*. Phép vị tự thì có tính chất đó, còn phép dời hình nói chung không có tính chất đó (chẳng hạn phép quay với góc khác $k\pi$). Bởi vậy, vì phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự và phép dời hình nên cũng không có tính chất đó.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

31. – Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành trung điểm D' của đoạn thẳng $B'C'$, và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến $A'D'$ của tam giác $A'B'C'$. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng thế. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm tam giác ABC biến thành trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

– Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Khi đó phép đồng dạng F biến đường thẳng AH thành đường thẳng $A'H'$. Vì $AH \perp BC$ nên $A'H' \perp B'C'$, nói cách khác $A'H'$ là đường cao của tam giác $A'B'C'$. Đối với các đường cao khác cũng thế. Vì trực tâm tam giác là giao điểm của các đường cao nên trực tâm tam giác ABC biến thành trực tâm tam giác $A'B'C'$.

– Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OA = OB = OC$ nên nếu điểm O biến thành điểm O' thì $O'A' = O'B' = O'C' = kOA = kOB = kOC$, do đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

32. Giả sử cho hai n-giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có tâm lần lượt là O và O'. Đặt $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{O'B_1}{OA_1}$. Gọi V là phép vị tự tâm O, tỉ số k và $C_1C_2...C_n$ là ảnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ qua phép vị tự V. Hiển nhiên $C_1C_2...C_n$ cũng là đa giác đều và vì $\dfrac{C_1C_2}{A_1A_2} = k$ nên $C_1C_2 = B_1B_2$. Vậy, hai n-giác đều $C_1C_2...C_n$ và $B_1B_2...B_n$ có cạnh bằng nhau, tức là có phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_2...B_n$ (xem BT 22, chương I, SGK). Nếu gọi F là phép hợp thành của V và D thì F là phép đồng dạng biến $A_1A_2...A_n$ thành $B_1B_2...B_n$. Vậy hai đa giác đều đó đồng dạng với nhau.

33. Ta chú ý rằng có thể dựng rất nhiều tam giác ABC với hai góc B và C bằng hai góc β và γ đã cho, nhưng các tam giác đó đều đồng dạng với nhau. Vậy ta chỉ cần chọn trong các tam giác đó một tam giác thoả mãn điều kiện về yếu tố thứ ba đã cho. Ta suy ra cách dựng :

a) Dựng tam giác $AB'C'$ có hai góc B' và C' lần lượt bằng β và γ. Cụ thể như sau : Dựng đoạn thẳng $B'C'$ tuỳ ý. Trên một nửa mặt phẳng có bờ $B'C'$ dựng tia $B'x$ và $C'y$ sao cho $\widehat{xB'C'} = \beta$ và $\widehat{yC'B'} = \gamma$. Hai tia đó cắt nhau tại A và ta có tam giác $AB'C'$.

Dựng đường cao AH' của tam giác $AB'C'$. Nếu $AH' = h$ thì $AB'C'$ là tam giác cần dựng.

Nếu $AH' \neq h$ thì trên tia AH', ta lấy điểm H sao cho $AH = h$ rồi dựng đường thẳng a vuông góc với AH tại H, cắt AB' tại B và cắt AC' tại C. Tam giác cần dựng là ABC.

b) Tương tự như câu a).

c) Dựng tam giác $AB'C'$ như câu a) rồi dựng tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$. Trên tia AO' lấy điểm O sao cho $AO = R$ rồi dựng đường tròn (O) đi qua A (tức là có bán kính bằng R). Hai tia AB' và AC' lần lượt cắt (O) tại các điểm B và C (khác A). ABC là tam giác cần dựng.